Matematika a vyučování, filozofie a filozofování

JINDŘICH BEČVÁŘ – VLASTIMIL DLAB

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha – Bzí u Železného Brodu

Mnozí světoví matematici byli zároveň filozofy. Ponecháme-li stranou starověké myslitele, v jejichž době byla filozofie jakousi „vševědou“, z níž se během času postupně oddělovaly jednotlivé disciplíny, a středověké učence, kteří pěstovali široké spektrum oborů provázaných s teologií a filozofií, můžeme připomenout například jména René Descartes, Blaise Pascal, Gottfried Wilhelm Leibniz, Pierre Simon Laplace, Bernard Bolzano, Henri Poincaré, Bertrand Russell, Alfred North Whitehead a Kurt Gödel. I v současné době se poměrně často setkáváme s nejrůznějším filozofováním, dokonce v článcích určených učitelům základních a středních škol, vyučujícím na učitelském studiu matematiky a jejich studentům.[1)]

Obdiv, který k matematikům-filozofům (skutečným i pokleslým) mají někteří autoři věnující se vzdělávání matematice, je mnohdy svádí na scestí. Snaží se být také matematiky-filozofy, resp. didaktiky-filozofy a přimykají se ke slavným autoritám již tím, že ve svých článcích hojně uvádějí citáty z jejich děl. Bohužel si však často osvojí pouze jakýsi „filozofický žargon“, pomocí něhož se vyjadřují (slovně i písemně) a jednoduché věci zatemňují komplikovanou slovní ekvilibristikou. Někdy tím dokonce zastírají své chatrné znalosti matematické a nedostatečné schopnosti přesného matematického vyjadřování. Smutné je, že se nezřídka stává, že je jejich okolí začne právě pro tento jejich „filozofický rozměr“ nezřízeně ctít, stávají se „významnými experty“ a rozhodují o všeličems (na katedrách, v redakčních radách, nejrůznějších komisích apod.), i o trendech a metodách ve vyučování matematice.

Dá-li si matematicky vzdělaný čtenář práci s matematickým článkem z oblasti vzdělávání, pak po menším či větším úsilí prověří jeho matematickou správnost, neboť matematika pracuje s přesně vymezenými pojmy,

[1)] Myslíme si, že je rozumné přispět k neustále probíhající diskusi o vyučování matematice na základních a středních školách krátkou ukázkou toho, jak naše odborné časopisy učitelům matematiky pomáhají.

jasně formuluje tvrzení a exaktním způsobem je dokazuje. Nebo objeví v článku matematické chyby, nepřesnosti či jiné nedostatky. Má-li navíc cit pro jazyk a kulturu matematického vyjadřování, ocení jazykové schopnosti autora, či se nad nimi pozastaví.

Jedná-li se však o filozofující článek týkající se matematiky nebo vyučování matematice, je situace s prověřením správnosti textu složitější. Vše stojí „na vodě". Autor takovýchto článků totiž pracuje s jazykem velice volně či dokonce svévolně, užívá pojmy, jejichž význam je vzhledem k obvyklému chápání posunutý, pojmy, které nejsou přesně vymezené, uvádí tvrzení, která jsou sice často květnatá, ale většinou vágní. Nad takovými články stojíme v rozpacích.

Srovnáme-li články týkající se vyučování matematice, které byly publikovány za starých časů např. v *Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky*, později v *Matematice a fyzice ve škole*, s texty, které u nás vycházejí v době současné, nemůžeme být spokojeni. V časopisech primárně zaměřených na vzdělávání v matematice se dnes běžně setkáváme s texty, které s matematikou nemají mnoho společného, obsahují matematické chyby a „vědecky" rozebírají banality.

Někteří autoři se s větším či menším úspěchem snaží psát „filozofickým" stylem a příliš nepřemýšlejí o matematické správnosti a přesnosti svého textu, filozofickým či didaktickým jazykem odvádějí pozornost čtenářů od věcného obsahu textu. Přečteme-li si jejich články pozorně, zjistíme, že mnohdy píší o věcech, o kterých mají jen matnou představu, že komplikují a zatemňují zcela jednoduché věci svým „vědeckým přístupem" s řadou „odborných" termínů. Matematický obsah se téměř vytratil a byl nahrazen „vědeckými" didaktickými či filozofickými úvahami, které jsou navíc mnohdy psány nekulturním jazykem.

Přednášky těchto matematiků-filozofů-didaktiků naštěstí povětšině odplynou „do propadliště dějin". Jejich psané texty však zůstávají, ovlivňují výuku matematiky v celostátním měřítku a mají neblahý vliv jak na vysokoškolské učitele, kteří působí na fakultách s učitelským studiem matematiky, tak na jejich studenty – budoucí učitele.

Uveďme několik příkladů kuriózních, chybných a pochybných formulací a stručně je komentujme.

…ukážeme několik aplikací pojmu vzdálenost ve vyučování na základní a střední škole.

Komentář: Umíme si představit aplikaci výsledku, aplikaci tvrzení, aplikaci teorie apod. Jakým způsobem se však aplikuje pojem? Snad chtěl autor sdělit, že ukáže, jak se k objasnění pojmu „vzdálenost“ může přistoupit ve škole.

... naznačení konstrukce velikosti úsečky jako reálného čísla, které může být i iracionální.

Komentář: Jak se konstruuje velikost? Čtenář patrně usoudí, že se jedná o „naznačení konstrukce úsečky, jejíž délkou (velikostí) je dané reálné číslo“.

... dokazuje jednoznačnost a existenci velikosti úsečky ve tvaru reálného čísla $n, n_1 n_2 n_3 \dots n_k \dots$, přičemž se odvolává na teorii nekonečných řad.

Komentář: Pozorný čtenář je zmaten. Snad chtěl autor říci toto: „... dokazuje, že každá úsečka má jednoznačně určenou délku (velikost), kterou je nějaké reálné číslo tvaru $n, n_1 n_2 n_3 \dots n_k \dots$, jak plyne z teorie řad“, resp. že „délkou úsečky je jednoznačně určené reálné číslo $n, n_1 n_2 n_3 \dots n_k \dots$“ Nebo snad chtěl říci, že ke každému kladnému reálnému číslu existuje úsečka, která má takovou délku? Pak by ovšem nebyla určena jednoznačně.

V dalším, navazujícím článku autor opět uvádí fomulace týkající se *konstrukce velikosti úsečky jako desetinného čísla*, resp. *konstrukce dolní a horní aproximace velikosti úsečky*, resp. *konstrukce velikosti úsečky měřením.* Z jakého důvodu zde autor užívá geometrický termín „konstrukce“? Pozorný čtenář teprve nyní pochopí, že se nejedná o žádnou „konstrukci“, ale o proces měření úsečky, při němž se její délka postupně zjišťuje s přesností na centimetry, milimetry atd.

... délka, spolu s šířkou a dílem, které jsou složkami praktické geometrie předeukleidovské éry, ...

Komentář: Co jsou „složky“ geometrie? Jsou ještě nějaké jiné složky geometrie kromě délky, šířky a dílu?

O úhlopříčce čtverce $ABCD$, jehož strana má délku 4 cm, se praví: *Známým způsobem lze ovšem dokázat, že $|AC|$ je iracionální číslo, představit však jeho racionální aproximaci měřením úseček považuji za důležité.*

Komentář: Na střední škole nelze dokázat, že $|AC|$ je *iracionální* číslo (žádná taková čísla dosud nebyla zavedena), ale že neexistuje *racionální* číslo, které je délkou úsečky AC. Takovéto zjištění se pak užije k motivaci zavedení oboru reálných čísel, tj. k populárnímu výkladu o rozšíření oboru racionálních čísel na obor reálných čísel. Exaktní konstrukce reálných čísel se většinou neprovádí ani na vysokých školách zaměřených přímo na matematiku.

Poznamenejme ještě, že k dolnímu a hornímu odhadu délky $|AC|$ (5,6 cm a 5,7 cm) se ve škole měřením narýsovaného čtverce nedostaneme. Navíc, měření dolních a horních aproximací nějaké délky o její racionalitě či iracionalitě vůbec nic nevypovídá.

Geometrické útvary chápeme jako části metrických prostorů dimenze 2 *nebo* 3*, tedy ne jako „pouhé množiny“, ale složky struktury* $[P, d]$.

Komentář: Autor si patrně popletl pojem metrického a eukleidovského prostoru (jak by definoval dimenzi metrického prostoru?), navíc užil zcela nesmyslné termíny „část metrického prostoru“ a *složka struktury.* Poznamenejme, že symbolem $[P, d]$ je míněn metrický prostor definovaný na množině P metrikou d, která podle autorovy definice může být identicky rovna nule!

V posledním citátu dokumentujeme, jak lze „vědeckým přístupem“ z jednoduché věci vyrobit složitou. Vloudí-li se do takovéto pasáže ještě slohové neobratnosti a navíc banální omyl, je neštěstí hotovo.

Hledáme-li množinu G, jejíž prvky mají vlastnost V, provádíme tak vlastně rozklad množiny bodů (roviny) na dvě oblasti: G je množina všech bodů, které mají vlastnost V a její doplněk G' je množina bodů, které vlastnost V nemají. Tento pohled lze samozřejmě rozvíjet i na tradičních úlohách školské matematiky. Je-li např. kružnice $k(S; r)$ množina všech bodů X roviny, pro které platí $|SX| = r$, pak vnitřek kruhu s hranicí k je množinou bodů X kružnice s průměrem AB, pro něž platí úhel AXB je tupý nebo přímý, vnějšek tohoto kruhu pak je množina těch bodů, pro něž platí úhel AXB je tupý nebo nulový. Rozklad příslušné množiny (např. roviny) je tak spojen s množinou všech možností odpovídajících dané výrokové formě.

Pokleslé články tohoto typu, navíc psané uznávanými didaktiky, nepřispívají ani k obecné kultivaci matematického myšlení a vyjadřování, ani k dalšímu vzdělávání učitelů, ani k výchově nové generace didaktiků. Velmi negativně ovlivňují celkovou matematickou kulturu učitelů a zprostředkovaně i studentů a žáků. Příslušníci mladší generace didaktiků jsou bohužel těmito „uznávanými odborníky“ k takovéto pokleslosti vychováváni. Navíc získávají pocit, že právě takovýmito články se „dělá věda“ a právě touto cestou se jde za úspěchem, uznáním a kariérou.