

1 ČÍSELNÉ OBORY

1.1 Základní poznatky o množinách

Než přistoupíme ke studiu jednotlivých číselných oborů, připomeňme si základní množinové pojmy, které budeme v dalším textu používat; pro jednoduchost a názornost budeme vycházet z jejich intuitivního pojetí.

Množinou budeme rozumět souhrn libovolných objektů. Množinu považujeme za **určenou**, je-li možno o každém objektu jednoznačně rozhodnout, zda do ní patří, či nikoli. Každý z objektů, který patří do dané množiny, se nazývá jejím **prvkem (elementem)**. Množiny budeme značit velkými písmeny latinské abecedy, např. **A**, **B**, **M**, apod., prvky množin budeme zpravidla značit malými písmeny, např. *a*, *b*, *x*, apod. Skutečnost, že *a* je **prvkem (elementem) množiny A**, vyjadřujeme zápisem $a \in A$. Není-li určitý objekt *b* prvkem množiny **A**, píšeme $b \notin A$.

Obsahuje-li daná množina alespoň jeden prvek, nazývá se **neprázdná množina**; neobsahuje-li žádný prvek, nazývá se **prázdná množina** a značí se symbolem $\emptyset$. Množina, která má konečný počet prvků (tj. množina, která je prázdná, nebo je počet jejích prvků dán přirozeným číslem - viz část 1.1.2), se nazývá **konečná množina**; každá množina, která není konečná, se nazývá **nekonečná**.

Je-li množina **A** konečná, můžeme ji určit **výčtem** jejích prvků, které bez ohledu na pořadí vypíšeme a uzavřeme do složených závorek $\{ \}$, například $A = \{1, 3, 5, 7\}$.

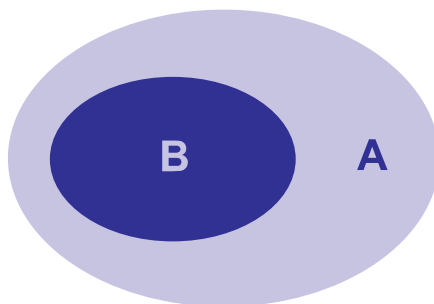
Konečnou i nekonečnou množinu můžeme dále určit **charakteristickou vlastností**, tj. takovou vlastností, kterou mají právě jen prvky zadávané množiny. Zjišťování uvažované vlastnosti se přitom provádí v tzv. **základní (univerzální) množině U**, která obsahuje všechny objekty, které nás v dané situaci zajímají. Budeme například psát:

$$A = \{x \in U; V(x)\}$$

a říkat: „**A** je množina všech *x* z množiny **U**, pro která platí (která mají vlastnost) $V(x)$.“

Množinové vztahy a operace

Množina **B** se nazývá **podmnožinou** množiny **A**, je-li každý prvek množiny **B** prvkem množiny **A**; píšeme $B \subset A$.



OBR. 1.1 $B \subset A$

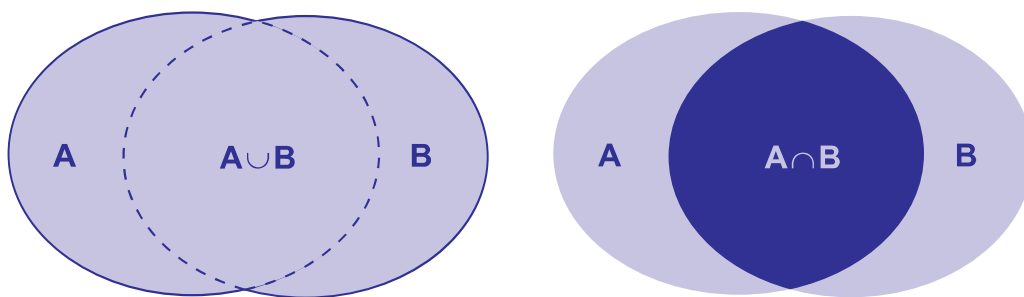
Například množina $\mathbf{B} = \{3, 5, 7, 9\}$ je podmnožinou množiny $\mathbf{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$; množina *všech pravoúhlých trojúhelníků* je podmnožinou množiny *všech trojúhelníků*, apod.

Uvědomme si, že **každá množina je podmnožinou sebe sama**, tj. pro každou množinu $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}$. Rovněž platí, že **prázdná množina je podmnožinou každé množiny**, tj. pro každou množinu $\mathbf{A}$ platí: $\emptyset \subset \mathbf{A}$.

Množiny $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ považujeme za **sobě rovné** (píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$), právě když $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ a zároveň $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, tj. skládají-li se z týchž prvků.

Sjednocení $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ množin $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. Z definice ihned plyne, že sjednocení libovolné množiny $\mathbf{A}$ s prázdnou množinou je množina $\mathbf{A}$, tj. $\mathbf{A} \cup \emptyset = \mathbf{A}$.

Průnik $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ množin $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ je množina všech prvků, které patří zároveň do obou množin. Průnik každé množiny $\mathbf{A}$ s prázdnou množinou je zřejmě prázdná množina, $\mathbf{A} \cap \emptyset = \emptyset$. Množiny $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, pro které platí $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$, se nazývají **disjunktní**.



OBR. 1.2 SJEDNOCENÍ A PRŮNIK MNOŽIN

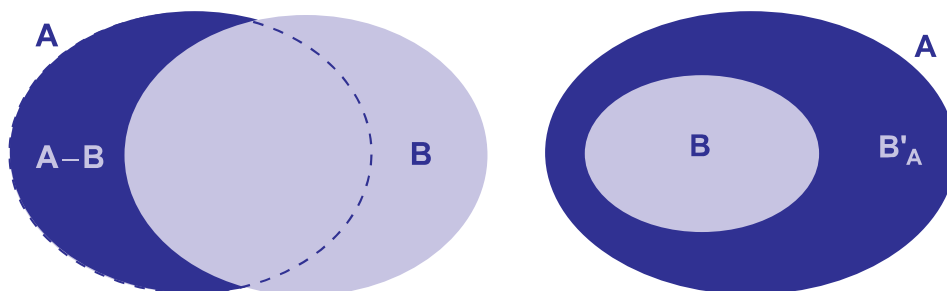
☛ Příklad 1

a) *Sjednocení množin:*

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13\}$$

b) *Průnik množin:* $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} = \{3, 5, 7\}$

Rozdíl $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ množin $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ je množina všech prvků množiny $\mathbf{A}$, které nejsou prvky množiny $\mathbf{B}$. Je-li speciálně $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, hovoříme o **doplňku množiny $\mathbf{B}$ v množině $\mathbf{A}$** a píšeme $\mathbf{B}'_{\mathbf{A}}$.



OBR. 1.3 ROZDÍL A DOPLŇEK MNOŽIN

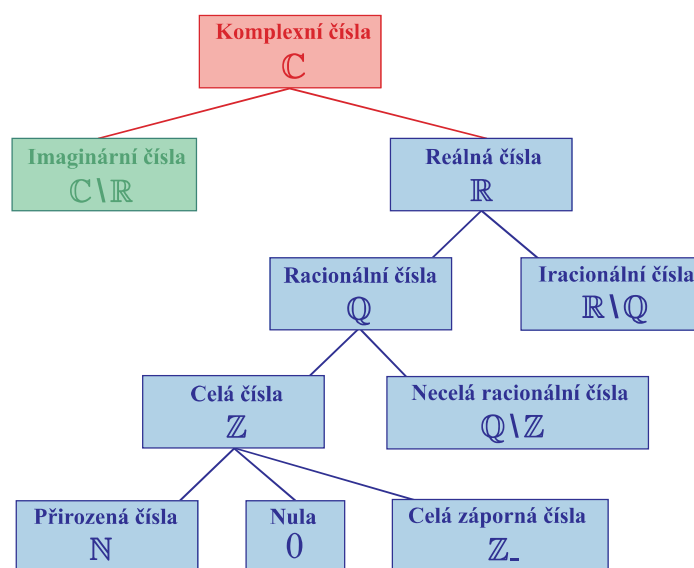
☛ Příklad 2

- a) Rozdíl množin: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} = \{2, 4, 6, 8\}$
 b) Doplněk množiny $\mathbf{B} = \{3, 5, 7, 9\}$ v množině $\mathbf{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$:

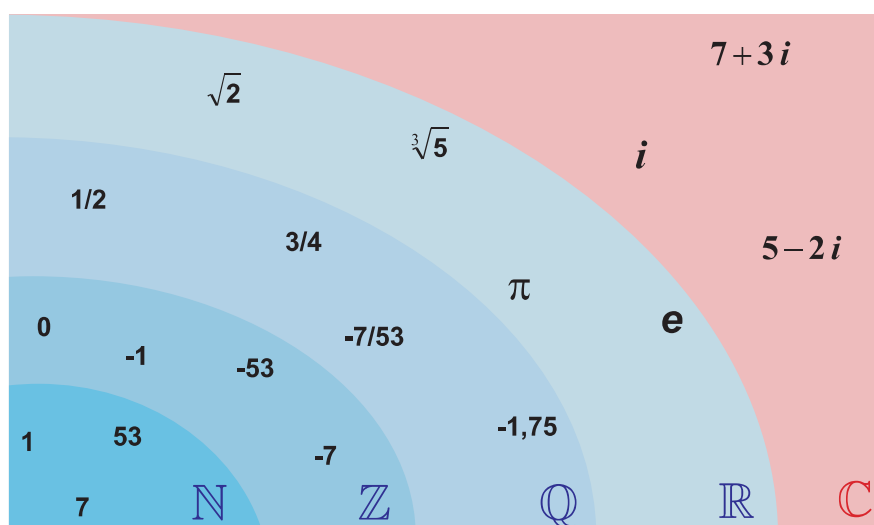
$$\mathbf{B}'_{\mathbf{A}} = \{1, 11, 13\}.$$

1.2 Druhy čísel

Zopakujme si, že jsme se již setkali s následujícími druhy čísel (pod názvem je vždy uveden symbol, který budeme v dalším pro danou množinu používat):



OBR. 1.4 VZTAHY MEZI JEDNOTLIVÝMI DRUHY ČÍSEL



OBR. 1.5 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

Protože přesné matematické definice jednotlivých číselných oborů jsou poměrně složité, nebudeme je zde uvádět, ale zůstaneme opět jen u intuitivního pojetí. Nejprve budeme uvažovat obor reálných čísel, která umožňují vyjádření výsledků měření délek, obsahů, objemů, fyzikálních stavů těles a jejich změn apod. Reálná čísla lze znázornit pomocí číselné osy: každé reálné číslo odpovídá právě jednomu bodu této přímky a naopak, každý bod číselné osy odpovídá právě jednomu reálnému číslu.

1.3 Základní početní operace a jejich vlastnosti

Skutečnost, že dva symboly, například a , b , představují totéž číslo, vyjádříme tím, že mezi ně zapíšeme **znak rovnosti** = zvaný také **rovnítko**; v našem příkladu $a = b$ (čteme a **je rovno** b). Vztah vyjádřený tímto zápisem se nazývá **rovnost čísel**. Neplatí-li $a = b$, píšeme $a \neq b$ a říkáme, že a **je různé od** b .

Základní početní operace jsou **sčítání** a **násobení**, které každým dvěma číslům a , b dané množiny čísel přiřazují právě jedno číslo $a + b$ (čteme a plus b) zvané jejich **součet** a právě jedno číslo $a \cdot b$ nebo krátce ab (čteme a krát b) zvané jejich **součin**. Čísla a , b se v prvním případě nazývají **sčítanci**, v druhém **činitelé**:



Množina všech čísel určitého druhu, ve které jsou definovány bez omezení operace sčítání a násobení, se nazývá **obor čísel** (příklady oborů čísel jsou uvedeny v předchozí části).

K základním početním operacím se zavádějí **operace inverzní**, tzv. **odčítání** a **dělení**, které dvěma číslům a , b z daného oboru přiřazují číslo zvané jejich **rozdíl** a číslo zvané jejich **podíl**: Rozdíl $a - b$ (čteme a minus b) čísel a , b je takové číslo x , pro které platí $b + x = a$; číslo a se nazývá **menšenec**, číslo b **menšitel**. Podíl $a : b$ či $\frac{a}{b}$ (čteme a děleno b či a lomeno b ; druhý výraz se nazývá **zlomkem**) čísel a , b , kde $b \neq 0$, je takové číslo x , pro které platí $b \cdot x = a$; čísla a , b se nazývají **dělenec** a **dělitel**, u zlomku **čitatel** a **jmenovatel**:



Součin n činitelů vesměs rovných číslu a se značí symbolem a^n nazývá se **n -tá mocnina čísla a** , operace přiřazující danému číslu jeho n -tou mocninu se nazývá **umocňování**; číslo a se nazývá **základ** či **mocněnec**, číslo n **exponent** či **mocnitel**:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ činitelů}}$$

Pro $n = 0$ položíme $a^0 = 1$.

Číslo b , pro které platí $b^n = a$ (a eventuálně některé další podmínky – viz dále), se nazývá **n -tou odmocninou** čísla a ; značí se symbolem $\sqrt[n]{a}$. Příslušná operace se nazývá **odmocňování**, symbolu $\sqrt{}$ se říká **odmocník**.

Matematické zápisy, kterými vyjadřujeme početní výkony, jež mají být provedeny, a pořadí, v jakém se tak má stát, nazýváme **početní výrazy**. Při zapisování početních operací se dodržuje následující dohoda: nejsou-li v daném početním výrazu závorky, provádíme nejprve umocňování a odmocňování, pak násobení a dělení a poté sčítání a odčítání. Jsou-li zde závorky, provádíme nejprve operace v závorkách; je-li zde více typů závorek, provádíme nejprve operace v závorkách, které jsou uvnitř ostatních.

V oboru reálných čísel platí následující tvrzení o početních operacích:

Pro každá tři reálná čísla a , b , c platí:

(U)	Součet $a + b$ je reálné číslo	Součin $a \cdot b$ je reálné číslo
(A)	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
(K)	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
(D)	$a(b + c) = ab + ac$	
(N)	$a + 0 = a$	$1 \cdot a = a$

Vlastnost (U) znamená, že obor reálných čísel je **uzavřený na sčítání a násobení**; vlastnosti (A) se říká **asociativnost sčítání a násobení** (sčítance při součtu můžeme libovolně sdružovat, stejně tak činitele při součinu); vlastnosti (K) se říká **komutativnost sčítání a násobení** (pořadí sčítanců při součtu můžeme zaměnit, stejně tak pořadí činitelů při součinu); řádek označený jako (N) zaručuje existenci tzv. **neutrálních prvků** – čísel 0 a 1. Dále platí následující tvrzení:

- (i) Ke každému reálnému číslu a existuje v oboru **R** právě jedno **opačné číslo** $-a$ takové, že $a + (-a) = 0$.
- (ii) Ke každému reálnému číslu $a \neq 0$ existuje v oboru **R** právě jedno **převrácené (inverzní) číslo** $\frac{1}{a}$ takové, že $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.
- (iii) Pro každá tři reálná čísla a , b , c platí: $a = b$ právě když $a + c = b + c$.
- (iv) Součin reálných čísel a , b je roven nule, právě když alespoň jedno z nich je rovno nule: $ab = 0$ právě když $a = 0$ nebo $b = 0$.

V oboru reálných čísel jsou dále zavedeny vztahy **nerovnosti**: „je **menší než**“ (značí se symbolem $<$) a „je **větší než**“ (značí se $>$), přičemž pro každá dvě reálná čísla platí: $a < b$ právě když $b > a$. Těmito vztahy je v oboru reálných čísel dáno uspořádání, které

má následující základní vlastnosti:

(v) Pro každá dvě reálná čísla a, b platí právě jeden ze vztahů:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

(vi) Pro každá tři reálná čísla a, b, c platí:

Je-li $a < b$ a zároveň $b < c$, pak $a < c$.

Je-li $a < b$, pak $a + c < b + c$.

Je-li $a < b$ a zároveň $c > 0$, pak $ac < bc$.

Chceme-li vyjádřit, že $a < b$ nebo $a = b$, píšeme $a \leq b$; je-li $a > b$ nebo $a = b$, píšeme $a \geq b$. Reálná čísla $a > 0$ se nazývají **kladná čísla**, $a < 0$ **záporná čísla**, $a \geq 0$ **nezáporná čísla** a $a \leq 0$ **nekladná čísla**.

Později budeme potřebovat ještě další vlastnosti uspořádání, které lze snadno vyvodit z výše uvedených základních tvrzení:

(vii) Pro každá čtyři reálná čísla a, b, c, d platí:

Je-li $a < b$ a zároveň $c < 0$, pak $ac > bc$.

Je-li $a < b$ a zároveň $c < d$, pak $a + c > b + d$.

Je-li $0 < a < b$ a zároveň $0 < c < d$, pak $ac < bd$.

Je-li $0 < a < b$, pak $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

(viii) Součin (podíl) dvou reálných čísel a, b je kladný, právě když jsou buď obě čísla kladná, nebo obě záporná.

(ix) Součin (podíl) dvou reálných čísel a, b je záporný, právě když je jedno z nich kladné a jedno záporné.

Reálná čísla jsme zvyklí znázorňovat pomocí **číselné osy**. To nám umožňuje následující tvrzení:

(x) Existuje zobrazení množiny **R** na přímku, které má tyto vlastnosti:

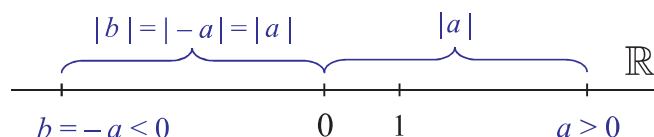
a) Je vzájemně jednoznačné, tj. obrazem každého reálného čísla je právě jeden bod přímky a naopak, každý bod přímky je obrazem právě jednoho reálného čísla.

b) Jsou-li a, b, c libovolná reálná čísla, pro která platí $a < b < c$, pak obraz čísla b leží na přímce mezi obrazy čísel a, c .

Při **grafickém znázornění reálných čísel na číselné ose** zvolíme přímku x a na ní dva různé body, z nichž jeden prohlásíme za obraz čísla 0, označíme jej stejným symbolem a nazveme jej **počátkem**, druhý zvolíme za obraz čísla 1, označíme jej rovněž symbolem

1 a nazveme jej **jednotkovým bodem**. Přímce x se pak říká **číselná osa**; její poloha se obvykle volí vodorovná a bod 1 se na ní volí vpravo od počátku 0.

Každému reálnému číslu a se na číselné ose přiřazuje bod zvaný **obraz čísla a** , který budeme značit stejně. **Kladné číslo a** se přitom zobrazuje na polopřímce '01' tak, že vzdálenost obrazu od počátku je rovna číslu a (tj. a krát velikost jednotkové úsečky '01'), obraz **záporného čísla b** leží na polopřímce opačné k polopřímce '01' a jeho vzdálenost od počátku 0 je rovna číslu $-b$. Polopřímka '01' se proto nazývá **kladná poloosa** (obvykle je opatřena šipkou), polopřímka opačná k polopřímce '01' se nazývá **záporná poloosa**. Pro jednoduchost se o reálných číslech často hovoří přímo jako o **bodech číselné osy**.



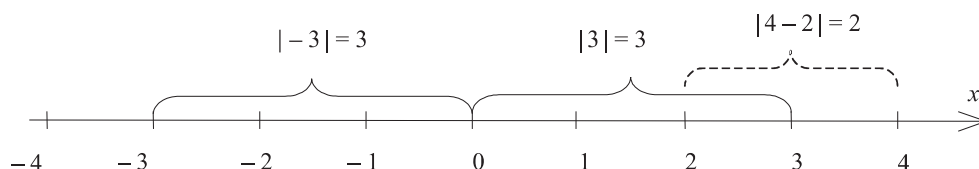
OBR. 1.6 ZNÁZORNĚNÍ REÁLNÝCH ČÍSEL NA ČÍSELNÉ OSE

Důležitým pojmem je **absolutní hodnota reálného čísla a** , která se značí symbolem $|a|$ a je definována takto:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{je-li } a \geq 0, \\ b, & \text{je-li } a < 0. \end{cases}$$

Absolutní hodnota nezáporného čísla je tedy dané číslo samo, absolutní hodnota záporného čísla je číslo k němu opačné – kdo si není jist s tímto pojmem, může se na toto místo vrátit po přečtení části 1.5 pojednávající o celých číslech.

Jak je naznačeno na obrázku (7), v grafickém znázornění reálných čísel na číselné ose představuje absolutní hodnota $|a|$ **vzdálenost obrazu čísla a od počátku**; $|a - b|$ pak představuje **vzdálenost obrazů čísel a, b** . Pro ilustraci si na číselné ose znázorníme několik konkrétních čísel a jejich absolutní hodnoty (stačí si uvědomit, že například vzdálenost čísla -3 od počátku je rovna třem, stejně jako vzdálenost čísla 3, podobně vzdálenost mezi čísly 2 a 4 je rovna 2):



OBR. 1.7 GEOMETRICKÝ VÝZNAM ABSOLUTNÍ HODNOTY - ILUSTRAČNÍ PŘÍKLAD

☛ **Příklad 3.** Vypočítejte:

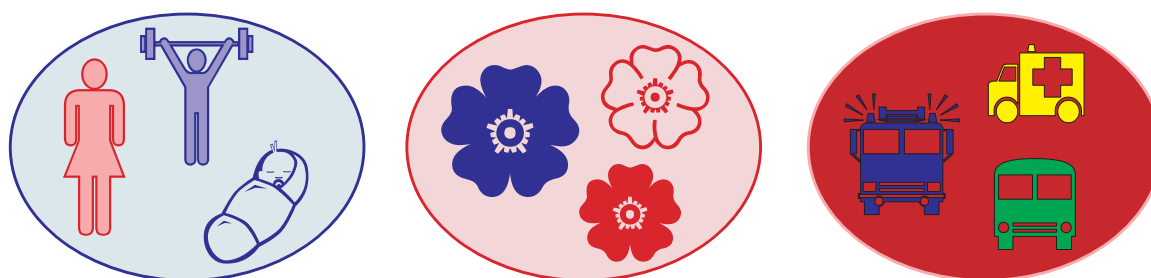
- | | | |
|------------|----------------------------|------------------------------|
| a) $ 42 $ | c) $ 17 - 21 $ | e) $ 21 - 17 - 21 - 26 $ |
| b) $ -42 $ | d) $ 21 - 17 - 21 - 25 $ | f) $ (21 - 17) - (21 - 26) $ |

Řešení

- a) $42 > 0$, proto $|42| = 42$
 b) $-42 < 0$, proto $|-42| = -(-42) = 42$
 c) $|17 - 21| = |-4| = 4$
 d) $|21 - 17| - |21 - 25| = |4| - |-4| = 4 - 4 = 0$
 e) $|21 - 17| - |21 - 26| = |4| - |-5| = 4 - 5 = -1$
 f) $|(21 - 17) - (21 - 26)| = |4 - (-5)| = |9| = 9$

1.4 Obor přirozených čísel

Přirozená čísla slouží k vyjádření počtu osob, zvířat, předmětů aj., obecněji počtu prvků konečných neprázdných množin. Přirozené číslo - uvažujme například číslo 3 - můžeme chápat jako společnou vlastnost následujících množin:



OBR. 1.8 PŘIROZENÉ ČÍSLO 3 JAKO SPOLEČNÁ VLASTNOST TŘÍPRVKOVÝCH MNOŽIN

Obor přirozených čísel je **uzavřený na sčítání a násobení**, početní operace splňují podmínky **(A)**, **(K)** a **(D)** uvedené v části 1.3. Nulu nebudeme považovat za přirozené číslo; číslo 1 má vlastnost **(N)** pro násobení.

Obor přirozených čísel však **není uzavřený na odčítání** (ne vždy je rozdíl dvou přirozených čísel přirozené číslo, např. $2 - 5 = -3$) ani na dělení (např. $2 : 5 = 0,40$ není přirozené číslo). V oboru přirozených čísel **k žádnému číslu neexistuje číslo opačné ani převrácené**.

Přirozená čísla jsme zvyklí zapisovat v **poziční číselné soustavě o základu deset**, neboli v **desítkové soustavě**. K tomu používáme deset číslic: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jejichž význam závisí na jejich umístění či pozici. Číslice zapisujeme za sebe v pořadí zprava doleva a postupně tak udáváme, kolik dané číslo obsahuje jednotek, desítek, stovek, tisíců, desetitisíců, statisíců, milionů, ..., tedy nultých, prvních, druhých, ..., šestých, ... mocnin čísla 10. Jistě víte, že například skupina číslic

387 956

vyjadřuje číslo obsahující 6 jednotek, 5 desítek, 9 stovek, 7 tisíc, 8 desetitisíc a 3 statisíce:

$$\begin{aligned}
 & 3 \cdot 100\,000 + 8 \cdot 10\,000 + 7 \cdot 1\,000 + 9 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\
 = & 3 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 .
 \end{aligned}$$

Právě uvedený výraz se nazývá **rozvinutý zápis daného čísla v desítkové soustavě**, zápis 387 956 se nazývá **zkrácený**.

Obecně lze každé přirozené číslo a vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0,$$

neboli ve zkráceném zápisu

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0,$$

kde n je přirozené číslo nebo nula, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ jsou některá z čísel $0, 1, \dots, 9$, přičemž $a_n \neq 0$. Číslo a_i se nazývá **číslice (cifra) řádu i čísla a** , číslo 10^i se nazývá **jednotka řádu i** .

Kromě desítkové soustavy se často setkáváme i se soustavou šedesátkovou, dvojkovou a příležitostně i s některými dalšími; těmto soustavám se budeme věnovat v druhé části modulu, a to v podkapitole ??.

1.5 Obor celých čísel

Je zřejmé, že si člověk nemohl dlouho vystačit jen s přirozenými čísly. Stačí si představit státního úředníka, který zaznamenává příjmy do státní pokladny: jakmile má zapsat i dluhy, musí si pomoci buď jinou barvou (jako tomu bylo například ve staré Číně), anebo záporným znaménkem – jakmile obdrží stejnou částku zpět, dluh bude vynulován (odmysleme si na chvíli úroky).

O něco více matematicky: viděli jsme, že obor přirozených čísel není uzavřený na odčítání (např. $2 - 5 = -3$ není přirozené číslo) a že k žádnému přirozenému číslu v tomto oboru neexistuje prvek opačný. Tuto obtíž odstraníme tím, že **obor přirozených čísel rozšíříme o nulu a o čísla opačná k přirozeným číslům** (celá záporná čísla). Získáme tak **obor celých čísel $\mathbf{Z}$** , který je uzavřený na sčítání, násobení a odčítání, platí v něm (A), (K), (D) a (N) a ke každému prvku $a \in \mathbf{Z}$ existuje v tomto oboru opačný prvek $-a \in \mathbf{Z}$.

☛ Příklad 4

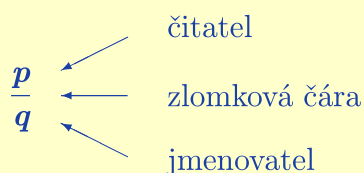
- a) Opačné číslo k číslu 5 je -5 .
- b) Opačné číslo k číslu 0 je 0.
- c) Opačné číslo k číslu -5 je $-(-5)$ a to je 5.

Pro počítání s opačnými čísly platí následující pravidla:

$0 - a = -a$	$-(-a) = a$	$(-1) \cdot a = -a$
$-(a + b) = -a - b$	$(-a) \cdot (-b) = ab$	$a - (-b) = a + b$
$-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$	$a \cdot (-b) = -ab$	$a + (-b) = a - b$

1.6 Obor racionálních čísel

Obor celých čísel $\mathbf{Z}$ není uzavřený vzhledem k operaci **dělení**. Můžeme jej však rozšířit na **obor racionálních čísel $\mathbf{Q}$** , který je tvořen právě těmi čísly, jež lze vyjádřit ve tvaru **zlomku** $\frac{p}{q}$, kde p je **celé číslo** a q je **číslo přirozené**. Připomeňme si základní terminologii:



Situací, v nichž jsou racionální čísla nezbytná, si každý z nás jistě dokáže představit libovolně mnoho: jakmile potřebujeme rozdělit celek na části, měřit veličiny ve stanovených jednotkách, vyjádřit volební preference ...

Zápis $\frac{p}{q}$, není jednoznačný – každé racionální číslo lze vyjádřit dokonce nekonečně mnoha způsoby, např.:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \dots$$

Mezi všemi těmito způsoby vyjádření existuje jediné, které má tu vlastnost, že číselník i jmenovatel jsou **nesoudělná čísla** (jejich společný dělitel je roven 1), v našem příkladu $\frac{3}{4}$; toto vyjádření racionálního čísla se nazývá **vyjádření v základním tvaru**.

Uvedené zlomky lze převést jeden na druhý pomocí operací rozšiřování a krácení. Připomeňme, že **rozšiřováním zlomku** $\frac{p}{q}$ nenulovým číslem c se rozumí úprava

$$\frac{p}{q} = \frac{p \cdot c}{q \cdot c},$$

krácením zlomku $\frac{p}{q}$ nenulovým číslem c se rozumí úprava

$$\frac{p \cdot c}{q \cdot c} = \frac{p}{q}.$$

☛ Příklad 5

Vyjádřete v základním tvaru racionální čísla: $\frac{15}{9}$; $0,4$; $-3,5$; $2,75$.

Řešení

Zadaná čísla vyjádříme ve tvaru zlomku, jehož číselníkem je přirozené číslo nesoudělné se jmenovatelem:

$$\frac{15}{9} = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{5}{3}; \quad 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}; \quad -3,5 = -\frac{35}{10} = -\frac{7}{2}; \quad 2,75 = \frac{275}{100} = \frac{11}{4}.$$

Uspořádání a operace v oboru racionálních čísel

Racionální čísla vyjádřená zlomky v **základním tvaru** $\frac{p}{q}$ a $\frac{r}{s}$ **porovnáváme** tak, že je převedeme na zlomky se stejným jmenovatelem qs , tj.

$$\frac{p}{q} = \frac{ps}{qs} \quad \text{a} \quad \frac{r}{s} = \frac{qr}{qs},$$

a porovnáme číselníky ps , qr (mějme na paměti, že v základním tvaru je $p, q > 0$):

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &< \frac{r}{s}, & \text{právě když } ps < qr, \\ \frac{p}{q} &= \frac{r}{s}, & \text{právě když } ps = qr, \\ \frac{p}{q} &> \frac{r}{s}, & \text{právě když } ps > qr.\end{aligned}$$

☛ Příklad 6

Porovnejte zlomky: a) $\frac{7}{11}, \frac{10}{13}$; b) $\frac{25}{75}, \frac{12}{36}$.

Řešení

- a) Oba zlomky jsou v základním tvaru, převedeme je na zlomky se jmenovatelem $11 \cdot 13 = 143$:

$$\frac{7}{11} = \frac{7 \cdot 13}{11 \cdot 13} = \frac{91}{143}, \quad \frac{10}{13} = \frac{10 \cdot 11}{13 \cdot 11} = \frac{110}{143}, \quad \text{tedy } \frac{7}{11} < \frac{10}{13}.$$

- b) Zlomky nejprve převedeme do základního tvaru zkrácením:

$$\frac{25}{75} = \frac{25}{3 \cdot 25} = \frac{1}{3}, \quad \frac{12}{36} = \frac{12}{12 \cdot 3} = \frac{1}{3}, \quad \text{tedy } \frac{25}{75} = \frac{12}{36}.$$

Zlomky $\frac{p}{q}$ a $\frac{r}{s}$ **sčítáme (odčítáme)** tak, že je převedeme na zlomky s týmž jmenovatelem; součet (rozdíl) zlomků s týmž jmenovatelem je zlomek s týmž jmenovatelem, v jehož čitateli je součet (rozdíl) čísel obou zlomků:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}, \quad \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps - qr}{qs}$$

Jak víme již ze základní školy, nejsou-li zlomky $\frac{p}{q}$ a $\frac{r}{s}$ v základním tvaru, stačí je převést na zlomky, v jejichž jmenovateli je **nejmenší společný jmenovatel** obou zlomků, tj. nejmenší společný násobek čísel q, s .

Zlomky $\frac{p}{q}$ a $\frac{r}{s}$ **násobíme** tak, že součin čísel zlomíme součinem jmenovatelů, a **dělíme** tak, že první zlomek (dělece) násobíme převrácenou hodnotou druhého zlomku (dělitele):

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}, \quad \frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{ps}{qr}$$

Zlomek, v jehož čitateli nebo jmenovateli je zlomek, se nazývá **složený zlomek**. Protože se však nejedná o nic jiného než o již známé dělení zlomků, převede se složený zlomek snadno na zlomek jednoduchý:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Každý zlomek, který je větší než jedna, můžeme zapsat jako součet celého čísla a zlomku, který je menší než jedna. Vynecháme-li v tomto zápise znaménko $+$, obdržíme **smíšené číslo** (rovné původnímu zlomku). U záporného racionálního čísla vyjádříme tímto způsobem jeho absolutní hodnotu a takto vzniklý složený zlomek opatříme záporným znaménkem, např.:

$$\frac{19}{7} = 2 + \frac{5}{7} = 2\frac{5}{7} \qquad -\frac{19}{7} = -(2 + \frac{5}{7}) = -2\frac{5}{7}$$

☛ Příklad 7

Vypočítejte: $\left(\frac{5}{6} + 1\right) \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{5}{8} - \frac{5}{12}\right) : \frac{5}{3} + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right)$.

Řešení

$$\begin{aligned} & \left(\frac{5}{6} + 1\right) \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{5}{8} - \frac{5}{12}\right) : \frac{5}{3} + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right) = \\ & = \frac{5+6}{6} \cdot \frac{3}{2} - \frac{30-20}{48} \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{5-9}{15} = \frac{11}{6} \cdot \frac{3}{2} - \frac{10}{48} \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{-4}{15} = \\ & = \frac{11}{4} - \frac{1}{8} - \frac{8}{15} = \frac{330-15-64}{120} = \underline{\underline{\frac{251}{120}}} \end{aligned}$$

Racionální číslo $a \in \mathbb{Q}$ zapisujeme

☛ **zlomkem** $\frac{p}{q}$, kde p je celé číslo a q přirozené číslo

☛ **desetinným rozvojem** tvaru

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = \pm \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots \right),$$

kde všechny koeficienty a_i jsou nezáporná celá čísla, pro $i \geq 1$ je navíc $0 \leq a_i \leq 9$; znaménko $+$ platí pro $a \geq 0$, znaménko $-$ pro $a < 0$.

Racionální čísla mají dva druhy desetinných rozvoju:

☛ **konečný desetinný rozvoj** – dané číslo lze v tomto případě vyjádřit jako **desetinné číslo**, tj. číslo tvaru $\frac{c}{10^n}$, kde c je celé číslo a n je přirozené číslo),

↪ **nekonečný periodický desetinný rozvoj**, tj. nekonečný desetinný rozvoj, v němž se opakuje určitá skupina číslic zvaná **perioda rozvoje**; perioda se při zápise vyznačuje pruhem.

☛ Příklad 8

Zapište desetinným číslem zlomek $\frac{7}{125}$.

Řešení. Zadaný zlomek lze snadno převést na zlomek, jehož jmenovatel je mocninou čísla 10:

$$\frac{7}{125} = \frac{7}{5^3} = \frac{7 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{7 \cdot 2^3}{(5 \cdot 2)^3} = \frac{56}{10^3} = \frac{56}{1000} = 0,056.$$

Ke stejnému výsledku vždy dojdeme také tím, že vydělíme čitatele jmenovatelem zlomku:

$$\begin{array}{r} 7 : 125 = 0,056 \\ 70 \\ 700 \\ 750 \\ 0 \end{array}$$

Všimněme si, že rozšířením lze na zlomek se jmenovatelem rovným mocnině čísla 10 převést jen takový zlomek, v jehož jmenovateli jsou pouze mocniny čísel 2 a 5.

☛ Příklad 9

Ve tvaru desetinného rozvoje zapište zlomky: a) $\frac{7}{63}$; b) $\frac{13}{44}$

Řešení

Žádný ze zadaných zlomků není možné rozšířit tak, aby byla ve jmenovateli pouze mocnina čísla 10 ($63 = 7 \cdot 3^2$, $44 = 2^2 \cdot 11$); není je proto možné vyjádřit desetinným číslem. Při dělení můžeme v obou případech pokračovat libovolně dlouho, zbytek je stále nenulové číslo. Protože se ve výpočtu začnou opakovat zbytky, opakuje se v desetinném rozvoji čísla stejná skupina číslic, tzv. **perioda**. Při zápise čísla se nad periodou vyznačí pruh a dále se tyto číslice nepíše:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 7 : 63 = 0,1111\dots = 0,\overline{1} & \text{b) } 13 : 44 = 0,2954545\dots = 0,29\overline{54} \\ \begin{array}{r} 70 \\ 70 \\ 70 \\ 70 \\ \dots \end{array} & \begin{array}{r} 130 \\ 420 \\ 240 \\ 200 \\ 240 \\ 200 \\ \dots \end{array} \end{array}$$

Potřebujeme-li porovnat racionální čísla zapsaná zlomky a racionální čísla zapsaná desetinnými rozvoji, stačí zlomky vyjádřit desetinnými rozvoji, anebo naopak:

☛ Příklad 10

Uspořádejte daná racionální čísla od nejmenšího k největšímu: $\frac{7}{15}$, $\frac{9}{20}$, $0,46$.

Řešení

Vyjádříme-li všechna zadaná čísla desetinnými rozvoji, získáme:

$$\frac{7}{15} = 0,4\bar{6}; \quad \frac{9}{20} = 0,45; \quad 0,46; \quad \text{tedy} \quad \frac{9}{20} = 0,45 < 0,46 < \frac{7}{15} = 0,4\bar{6}.$$

Vyjádříme-li všechna zadaná čísla ve tvaru zlomku porovnáním jednotlivých dvojic zlomků obdržíme opět:

$$\frac{9}{20} < 0,46 = \frac{46}{100} = \frac{23}{50} < \frac{7}{15}.$$

1.7 Obor reálných čísel

Reálnými čísly rozumíme čísla vyjadřující velikosti úseček, čísla k nim opačná a nulu. Jak již bylo řečeno, každé reálné číslo je graficky znázorněno na číselné ose právě jedním bodem a naopak, každý bod číselné osy je obrazem právě jednoho reálného čísla.

Každé reálné číslo je buď **racionální**, anebo **iracionální**. **Iracionální čísla nelze** vyjádřit ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde p je celé a q přirozené číslo; jejich **zápis v desítkové soustavě je nekonečný neperiodický**. V konkrétních numerických výpočtech vždy pracujeme jen s přibližnými hodnotami iracionálních čísel – připomeňme si proto **pravidla pro zaokrouhlování** reálného čísla a daného desetinným rozvojem $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ na jednotku (místo) řádu n :

- ➔ V desetinném rozvoji čísla a vynecháme za desetinnou čárkou všechny číslice řádů nižších než n , tj. číslice vpravo od a_n ; v celém čísle a tyto číslice nahradíme nulami.
- ➔ Je-li první z vynechaných číslic
 - ➔ 1, 2, 3, 4, pak se poslední ponechaná číslice (řádu n) nemění,
 - ➔ 5, 6, 7, 8, 9, pak se poslední ponechaná číslice zvětší o 1.

Číslo $\bar{a}$ získané zaokrouhlením se nazývá **zaokrouhlené číslo** nebo **zaokrouhlená hodnota čísla** a a používá se zápis $a \doteq \bar{a}$ (čteme: a je přibližně (po zaokrouhlení) rovno $\bar{a}$).

☛ Příklad 11

- a) $3248,5653 \doteq 3248,57$ (zaokrouhleno na setiny)
- b) $3248,5643 \doteq 3248,6$ (zaokrouhleno na desetiny)
- c) $3248,5643 \doteq 3249$ (zaokrouhleno na jednotky)
- d) $3248,5643 \doteq 3200$ (zaokrouhleno na stovky)

Intervaly

Interval je podmnožina množiny všech reálných čísel, která se na číselné ose zobrazí jako úsečka, polopřímka nebo přímka, přičemž krajní body úsečky a počáteční bod polopřímky k ní mohou, ale nemusí patřit.

Druhy intervalů:

↪ **Interval omezený** (na číselné ose je znázorněn **úsečkou**)

↪ **Uzavřený** (úsečka, která jej znázorňuje, obsahuje oba koncové body)

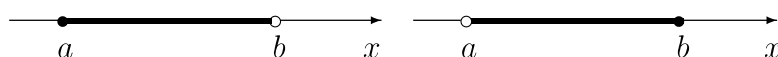
označení: $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbf{R}; a \leq x \leq b\}$

grafické znázornění: 

↪ **Polouzavřený** (úsečka obsahuje jen jeden z koncových bodů)

označení: $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbf{R}; a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbf{R}; a < x \leq b\}$

grafické znázornění:



↪ **Otevřený** (úsečka neobsahuje žádný koncový bod)

označení: $(a, b) = \{x \in \mathbf{R}; a < x < b\}$

grafické znázornění: 

↪ **Neomezený** (na číselné ose je znázorněn přímkou nebo polopřímkou)

↪ **Neomezený zprava** (od a do nekonečna)

označení: $\langle a, +\infty \rangle = \{x \in \mathbf{R}; x \geq a\}$, $(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}; x > a\}$

grafické znázornění:



↪ **Neomezený zleva**

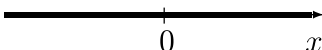
označení: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R}; x \leq b\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R}; x < b\}$

grafické znázornění:



↪ **Oboustranně neomezený**

označení: $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$

grafické znázornění: 

☛ Příklad 12

Určete a zobrazte na číselné ose sjednocení a průnik intervalů:

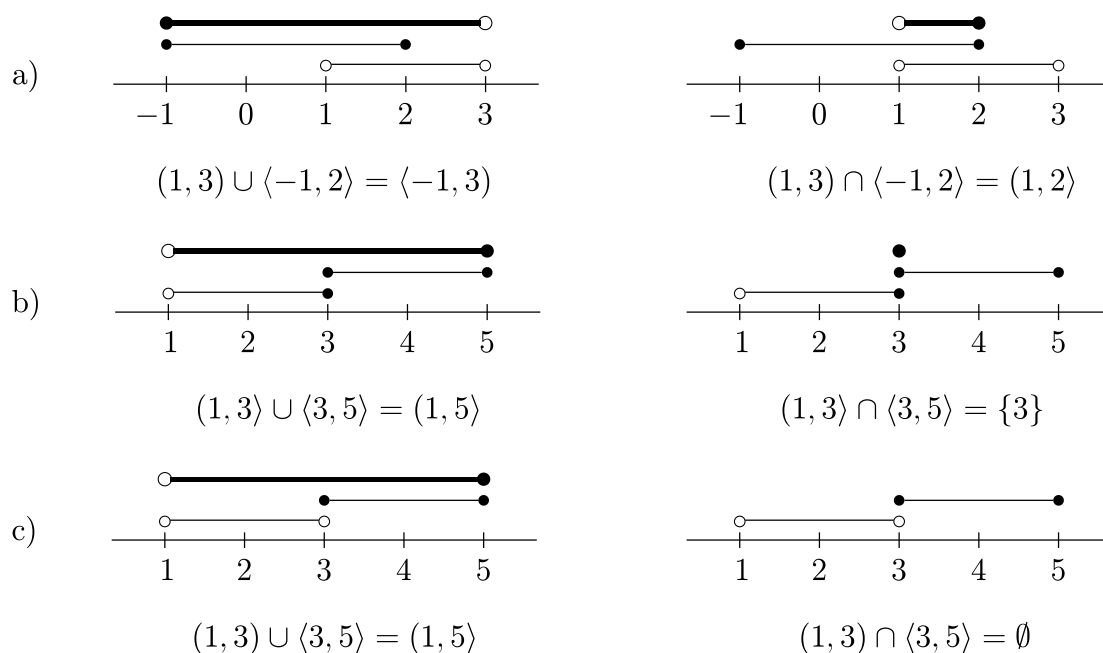
a) $(1, 3)$, $\langle -1, 2 \rangle$

b) $(1, 3)$, $\langle 3, 5 \rangle$

c) $(1, 3)$, $\langle 3, 5 \rangle$

Řešení

Pro názornost znázorníme zadané intervaly nad reálnou osou, hledané sjednocení, resp. průnik vyznačíme silnou čarou.



1.8 Obor komplexních čísel

Již ze střední školy víme, že např. velice jednoduchá algebraická rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá v množině $\mathbf{R}$ řešení. Snaha, vytvořit takový obor čísel, v němž by každá algebraická rovnice měla řešení, vedla k vytvoření množiny komplexních čísel. Množinu komplexních čísel budeme v dalším textu značit symbolem $\mathbf{C}$.

Množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ rozšíříme na množinu komplexních čísel $\mathbf{C}$ takto. Nejdříve přidáme k množině $\mathbf{R}$ číslo, které budeme značit i a které definujeme požadavkem, aby splňovalo rovnost $i^2 = -1$. Číslo i budeme nazývat **imaginární jednotkou**. Pak přidáme všechna čísla tvaru $x + iy$, kde x, y jsou reálná čísla a i je imaginární jednotka. Takto utvořená čísla budeme nazývat **komplexními čísly**. Číslo x nazýváme **reálnou částí** komplexního čísla $z = x + iy$ a značíme je $\Re z$; číslo y nazýváme **imaginární částí** komplexního čísla $z = x + iy$ a značíme je $\Im z$. Komplexní číslo, jehož reálná část je rovna nule, nazýváme **ryze imaginárním číslem**. Číslom komplexně sdruženým ke komplexnímu číslu $z = x + iy$ nazýváme číslo $\bar{z} = x - iy$. (Reálné části obou čísel jsou si rovny, imaginární se liší ve znaménku.)

Rovnost dvou komplexních čísel se definuje tak, že dvě komplexní čísla jsou si **rovna** právě tehdy, když se rovnají jejich reálné i jejich imaginární části.

Pro imaginární jednotku zřejmě platí rovnosti

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (1.1)$$

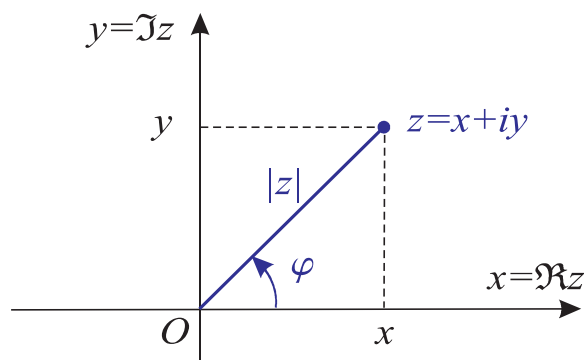
kde symbol $\mathbf{Z}$ zde i všude v textu bude značit množinu všech celých čísel.

Každé komplexní číslo $z = x + iy$ je jednoznačně určeno uspořádanou dvojicí reálných čísel (x, y) . Tato dvojice určuje v rovině $\mathbf{R}^2$ s kartézskou soustavou souřadnic právě jeden bod, který má souřadnice (x, y) . Také obráceně, každé uspořádané dvojici (x, y) souřadnic nějakého bodu roviny $\mathbf{R}^2$ můžeme přiřadit právě jedno komplexní číslo $z = x + iy$. Dostali jsme tak vzájemně jednoznačný vztah mezi rovinou $\mathbf{R}^2$ a množinou komplexních čísel $\mathbf{C}$.

Budeme proto i komplexní čísla chápat jako body v rovině a tuto rovinu budeme nazývat **rovinou komplexních čísel**, nebo také **komplexní rovinou** $\mathbf{C}$. Přímku

$$\{z \in \mathbf{C} \mid \Im z = 0\}, \quad \text{resp.} \quad \{z \in \mathbf{C} \mid \Re z = 0\}$$

nazýváme **reálnou**, resp. **imaginární osou** komplexní roviny $\mathbf{C}$.



OBR. 1.9 ZOBRAZENÍ KOMPLEXNÍHO ČÍSLA V KOMPLEXNÍ ROVINĚ

Modul komplexního čísla

Číslo

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.2)$$

je tzv. **modul (absolutní hodnota)** komplexního čísla $z = x + iy$. Zřejmě je $|z| \in \langle 0, \infty \rangle$. Každé komplexní číslo, jehož modul je roven 1, se nazývá **komplexní jednotka**.

Hlavní hodnota argumentu

Důležitou roli v celé analýze komplexní proměnné má velikost orientovaného úhlu, který svírá kladná reálná poloosa a průvodič bodu $z \neq 0$ v komplexní rovině. Toto číslo se obvykle značí symbolem φ a zpravidla se požaduje, aby leželo v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Tento úhel φ , který je přiřazen každému nenulovému komplexnímu číslu z , nazýváme **hlavní hodnota argumentu** komplexního čísla z . Někdy se místo intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ volí interval $\langle 0, 2\pi \rangle$. Pro hlavní hodnotu φ argumentu komplexního čísla z se používá označení $\arg z$. Jelikož každému nenulovému komplexnímu číslu z je přiřazena právě jedna hlavní hodnota argumentu $\arg z$, můžeme $\arg z$ chápat jako reálnou funkci komplexní proměnné, definovanou na množině $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, nebo také jako reálnou funkci dvou reálných proměnných. Explicitně ji můžeme definovat předpisem:

$$\arg z = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna } x < 0, y > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro všechna } x = 0, y > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna } x > 0, y \in \mathbf{R}, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro všechna } x = 0, y < 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna } x < 0, y \leq 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Pomocí hlavní hodnoty $\arg z$ nenulového komplexního čísla můžeme definovat nekonečně mnoho dalších hodnot argumentu tohoto čísla z , a to předpisem

$$\operatorname{Arg}_k z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (1.4)$$

Zřejmě $\operatorname{Arg}_k z \in \langle (2k-1)\pi, (2k+1)\pi \rangle$ a $\operatorname{Arg}_0 z = \arg z$. Takto definované funkce $\operatorname{Arg}_k z$, jejichž definičním oborem je $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, nazýváme **jednoznačnými větvemi argumentu**. Funkce $\arg z$ se nazývá **hlavní větev argumentu**.

Zápis komplexních čísel

Každé komplexní číslo $z \neq 0$ lze zapsat právě jedním způsobem v jeho tzv. **kartézském (algebraickém) tvaru**

$$z = x + iy \quad (1.5)$$

nebo v tzv. **goniometrickém (polárním) tvaru**

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi. \quad (1.6)$$

Z goniometrického tvaru komplexního čísla z plynou rovnosti

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.7)$$

Uvedeme ještě třetí, tzv. **exponenciální tvar** komplexního čísla

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad (1.8)$$

kde komplexní funkci reálné proměnné $e^{i\varphi}$ definujeme pomocí tzv. **Eulerova vztahu**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbf{R}. \quad (1.9)$$

☛ **Příklad 13**

Vyjádřeme komplexní číslo $z = 1 + i\sqrt{3}$ v goniometrickém a exponenciálním tvaru.

Řešení. Nejdříve vypočteme modul $|z|$ a hlavní hodnotu argumentu $\varphi = \arg z$. Podle (1.2) je $|z| = \sqrt{1+3} = 2$. Pro hodnotu φ podle (1.7) musí platit

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\pi \leq \varphi < \pi.$$

Odtud dostáváme $\varphi = \pi/3$. Podle (1.6) goniometrický tvar komplexního čísla z je

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Podobně podle (1.8) pro exponenciální tvar komplexního čísla z platí

$$z = 2e^{i\pi/3}.$$

Početní operace s komplexními čísly

Nechť $z = x + iy$ a $w = u + iv$ jsou dvě komplexní čísla. Pak jejich **součet**, resp. **rozdí**, resp. **součin**, resp. **podíl**, definujeme vztahy

$$z + w = (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v), \quad (1.10)$$

resp.

$$z - w = (x + iy) - (u + iv) = (x - u) + i(y - v), \quad (1.11)$$

resp.

$$zw = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu), \quad (1.12)$$

resp. pro $w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = \frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}. \quad (1.13)$$

Slovy můžeme operace s komplexními čísly popsat takto.

Sčítání, resp. **odčítání** je nejvýhodnější ve tvaru kartézském. Sečteme, resp. odečteme reálné části a sečteme, resp. odečteme imaginární části.

Násobení komplexních čísel v kartézském tvaru provádíme jako násobení dvojčlenů dvojčlenem, v goniometrickém a exponenciálním tvaru se vynásobí moduly a sčítají argumenty. Skutečně, je-li $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$, $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi) = |w|e^{i\psi}$, pak

$$\begin{aligned} zw &= |z|e^{i\varphi}|w|e^{i\psi} = |z||w|e^{i\varphi}e^{i\psi} = |z||w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) = \\ &= |z||w|[(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi)] = \\ &= |z||w|[\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)] = |z||w|e^{i(\varphi + \psi)}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Současně jsme ukázali, že platí rovnost

$$e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}. \quad (1.15)$$

Odtud indukci pro každé přirozené n plyne

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}. \quad (1.16)$$

Dělení komplexních čísel v kartézském tvaru pro $w \neq 0$ provádíme tak, že zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli. V goniometrickém a exponenciálním tvaru se dělí moduly a argumenty se odečítají. Skutečně, je-li

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}, \quad w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi) = |w|e^{i\psi},$$

pak

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{|w|(\cos \psi + i \sin \psi)} = \frac{|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi - i \sin \psi)}{|w|(\cos \psi + i \sin \psi)(\cos \psi - i \sin \psi)} = \\ &= \frac{|z|}{|w|} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)) = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\varphi - \psi)}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Moivreova věta

Z Eulerova vztahu

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbf{R}, \quad (1.18)$$

plyne

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}); \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \quad (1.19)$$

Umocníme-li obě strany rovnosti (1.18) na číslo n , dostaneme rovnost

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (e^{i\varphi})^n.$$

Nyní využijeme rovnosti (1.16), tj. $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ a použijeme opět Eulerův vztah. Dostaneme tak rovnost

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad (1.20)$$

známou pod názvem **Moivreova věta**.

Jestliže

$$z = |z|e^{i(\arg z + 2k\pi)} = |z|(\cos(\arg z + 2k\pi) + i \sin(\arg z + 2k\pi)), \quad \arg z \in \langle -\pi, \pi \rangle,$$

pak pomocí Moivreovy věty dostáváme

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right) \right)^n &= \\ &= |z|(\cos(\arg z + 2k\pi) + i \sin(\arg z + 2k\pi)) = z \end{aligned} \quad (1.21)$$

pro $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Je tedy přirozené prohlásit každé z n čísel

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (1.22)$$

za n -tou odmocninu komplexního čísla z . Povšimněte si, že pro $n = 2$ a reálná $z > 0$ odpovídá $(\sqrt[n]{z})_0 = (\sqrt{z})_0$ obvyklé definici druhé odmocniny v oboru reálných čísel. Podrobnější rozbor a zdůvodnění definice n -té odmocniny bude dáno ve druhé kapitole při studiu zobrazení v komplexní rovině.

✎ **Příklad 14.** Máme najít všechna řešení algebraické rovnice $z^6 - 8 = 0$.

Řešení. Úloha, najít všechna řešení algebraické rovnice $z^6 - 8 = 0$ je ekvivalentní s úlohou najít hodnoty všech šestých odmocnin čísla 8. Podle definice (1.22) n -té odmocniny je

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_k = \left(\sqrt[6]{8(\cos 0 + i\sin 0)}\right)_k = \sqrt{2} \left(\cos \frac{2k\pi}{6} + i\sin \frac{2k\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Odtud dostáváme hledané odmocniny

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[6]{8}\right)_0 &= \sqrt{2}(\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt{2}, \\ \left(\sqrt[6]{8}\right)_1 &= \sqrt{2}(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = \sqrt{2}(1/2 + i\sqrt{3}/2), \\ \left(\sqrt[6]{8}\right)_2 &= \sqrt{2}(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)) = \sqrt{2}(-1/2 + i\sqrt{3}/2), \\ \left(\sqrt[6]{8}\right)_3 &= \sqrt{2}(\cos \pi + i\sin \pi) = -\sqrt{2}, \\ \left(\sqrt[6]{8}\right)_4 &= \sqrt{2}(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)) = -\sqrt{2}(1/2 + i\sqrt{3}/2), \\ \left(\sqrt[6]{8}\right)_5 &= \sqrt{2}(\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)) = \sqrt{2}(1/2 - i\sqrt{3}/2). \end{aligned}$$

Řešeními dané rovnice je tedy množina komplexních čísel

$$\left\{ \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \right\}.$$

Pro komplexní čísla platí užitečné nerovnosti, které budeme používat v dalším textu. Z definice modulu komplexního čísla plynou nerovnosti

$$-|z| \leq \Re z \leq |z|, \quad -|z| \leq \Im z \leq |z|. \quad (1.23)$$

Zřejmě platí

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1\bar{z}_2), \quad (1.24)$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\Re(z_1\bar{z}_2). \quad (1.25)$$

Z nerovností (1.23) plyne $\Re(z_1\bar{z}_2) \leq |z_1||\bar{z}_2|$ a z předchozích dvou nerovností plynou nerovnosti

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (1.26)$$

V geometrické interpretaci představují nerovnosti (1.26) známé podmínky pro konstrukci trojúhelníka ze tří zadaných úseček: součet délek dvou stran nemůže být menší než strana třetí a velikost rozdílu délek dvou stran nemůže být větší než strana třetí.