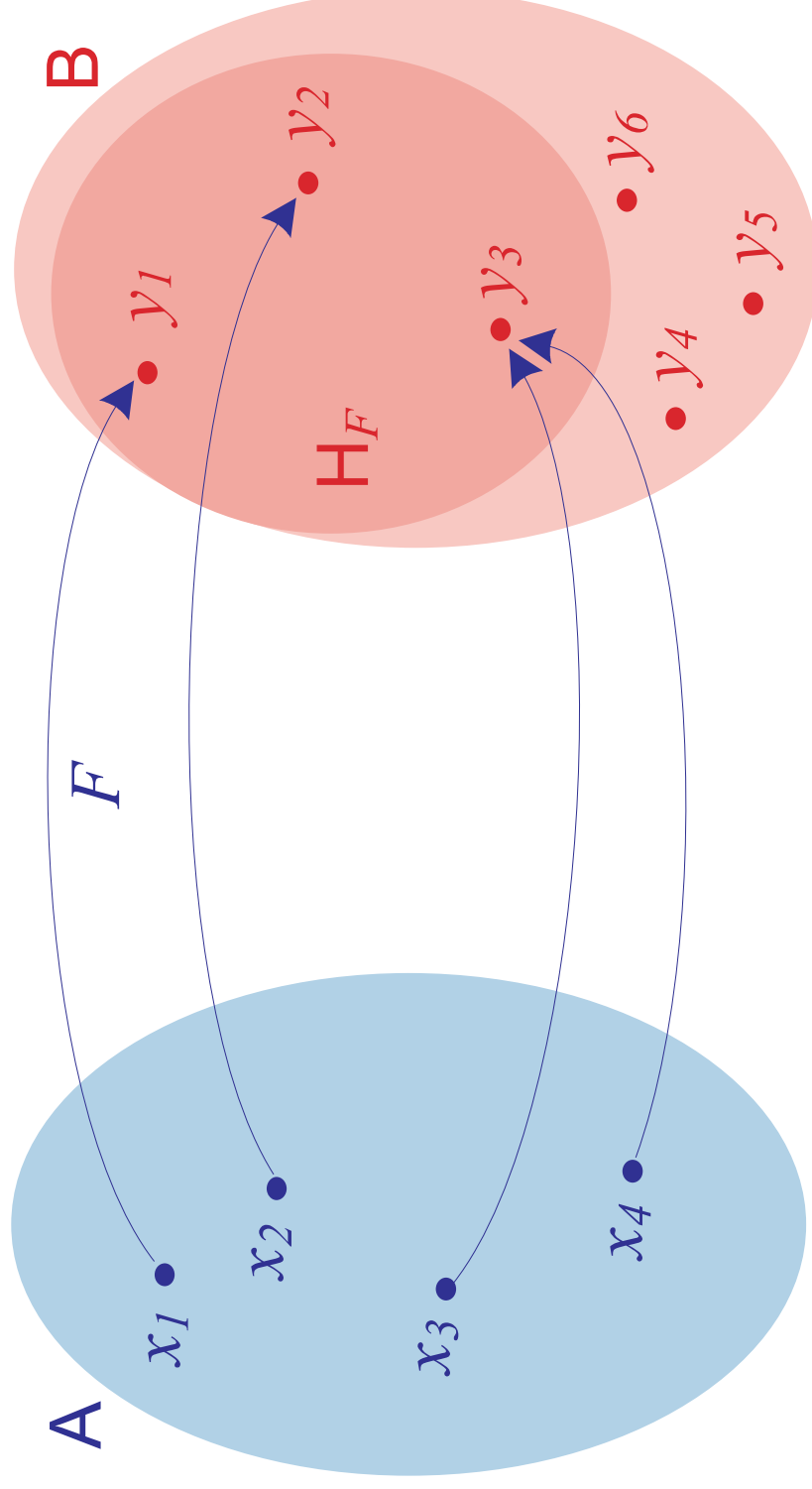


3.1 Pojem zobrazení a funkce



Uvažujme libovolné neprázdné množiny **A**, **B**. Přičítáme-li každému prvku $x \in \mathbf{A}$ právě jeden prvek $y \in \mathbf{B}$, dostáváme množinu F uspořádaných dvojic $(x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, která se nazývá **zobrazení množiny A do množiny B**.

Prvku x se říká **vzor** prvku y , prvku y se říká **obraz** prvku x v zobrazení F ; rovněž se používá vyjádření, že y je **hodnota zobrazení** F v bodě x a píše se $y = F(x)$ nebo $x \mapsto F(x)$. Množina **A** se nazývá **definiční obor zobrazení** F a označuje také symbolem $\mathbf{D}(F)$ či $\mathbf{D}_F$. Množina všech obrazů v zobrazení F se nazývá **obor hodnot zobrazení** F a označuje se $\mathbf{H}(F)$ či $\mathbf{H}_F$; platí: $\mathbf{H}(F) \subset \mathbf{B}$.

Symbolicky se zobrazení F množiny **A** do množiny **B** zapisuje takto:

$$F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{D}(F) = \mathbf{A}$$

Speciální případy zobrazení F množiny A do množiny B

- ➔ **Zobrazení v množině A nebo zobrazení množiny A do sebe** je zobrazení F , kde $A = B$.

Sem patří:

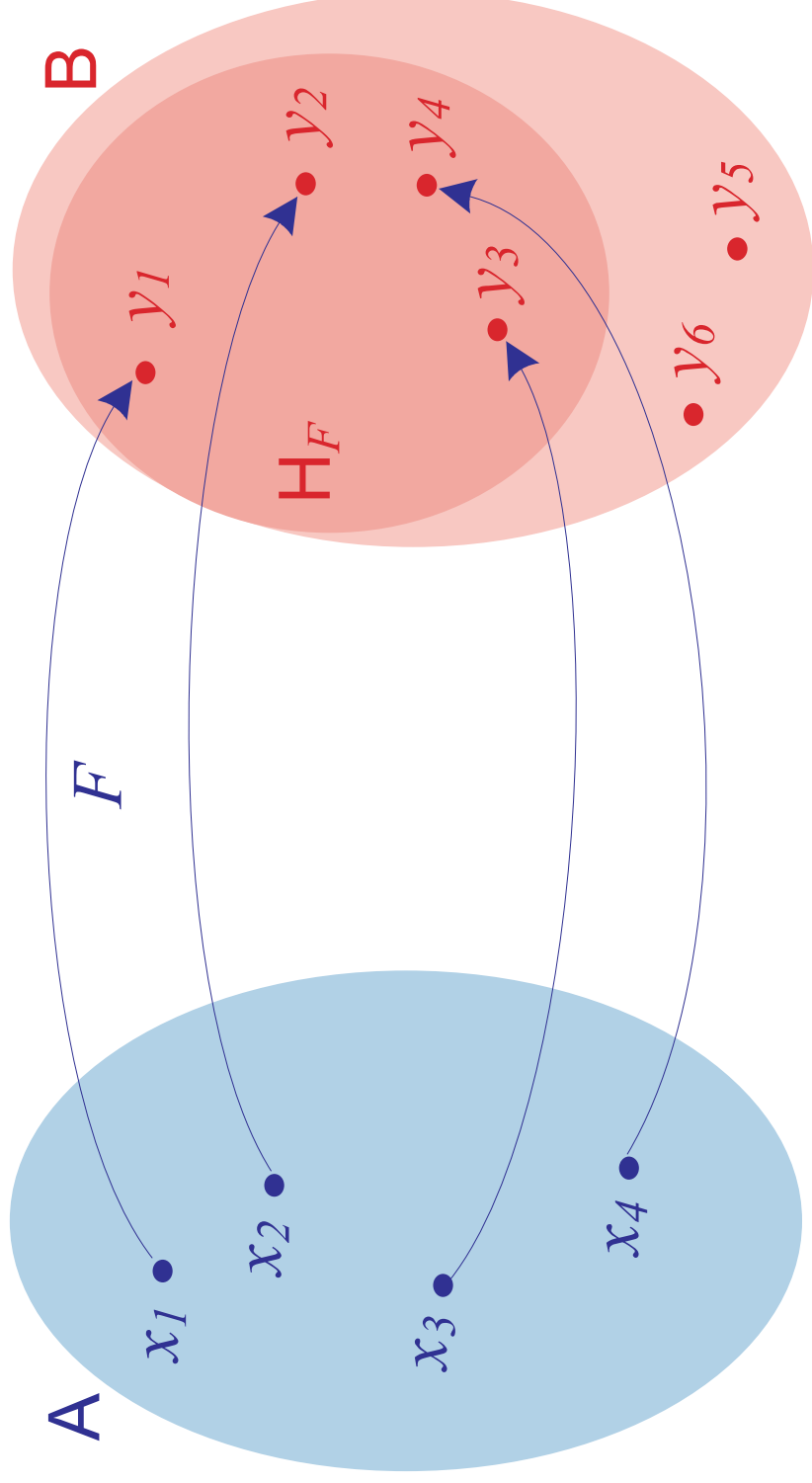
- ➔ **Reálná funkce jedné reálné proměnné** je zobrazení v množině všech reálných čísel $\mathbb{R}$, tj.

$$A = B = \mathbb{R}.$$

- ➔ **Geometrická zobrazení v rovině a v prostoru**, kde A , B jsou množiny bodů v téže rovině, popř. v prostoru.

➔ **Prosté zobrazení** je takové zobrazení F , ve kterém **každé dva různé vzory** x_1, x_2 **mají také různé obrazy** $F(x_1), F(x_2)$, tj. pro každé $x_1, x_2 \in \mathbf{A}$ platí:

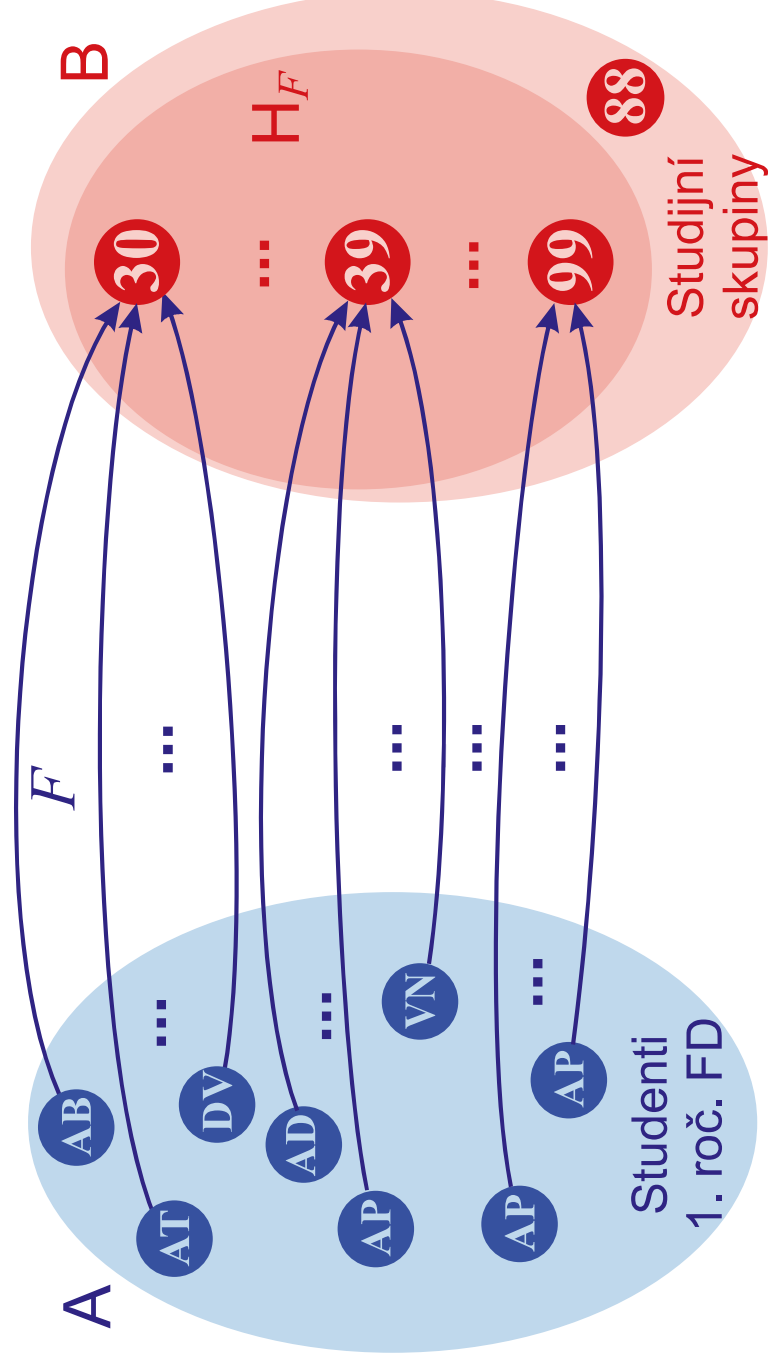
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2).$$



Ekvivalentní vyjádření:

$$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

☛ **Příklad 1.** Rozřazení studentů do studijních skupin:



Definiční obor: studenti 1. ročníku Fakulty dopravní ČVUT

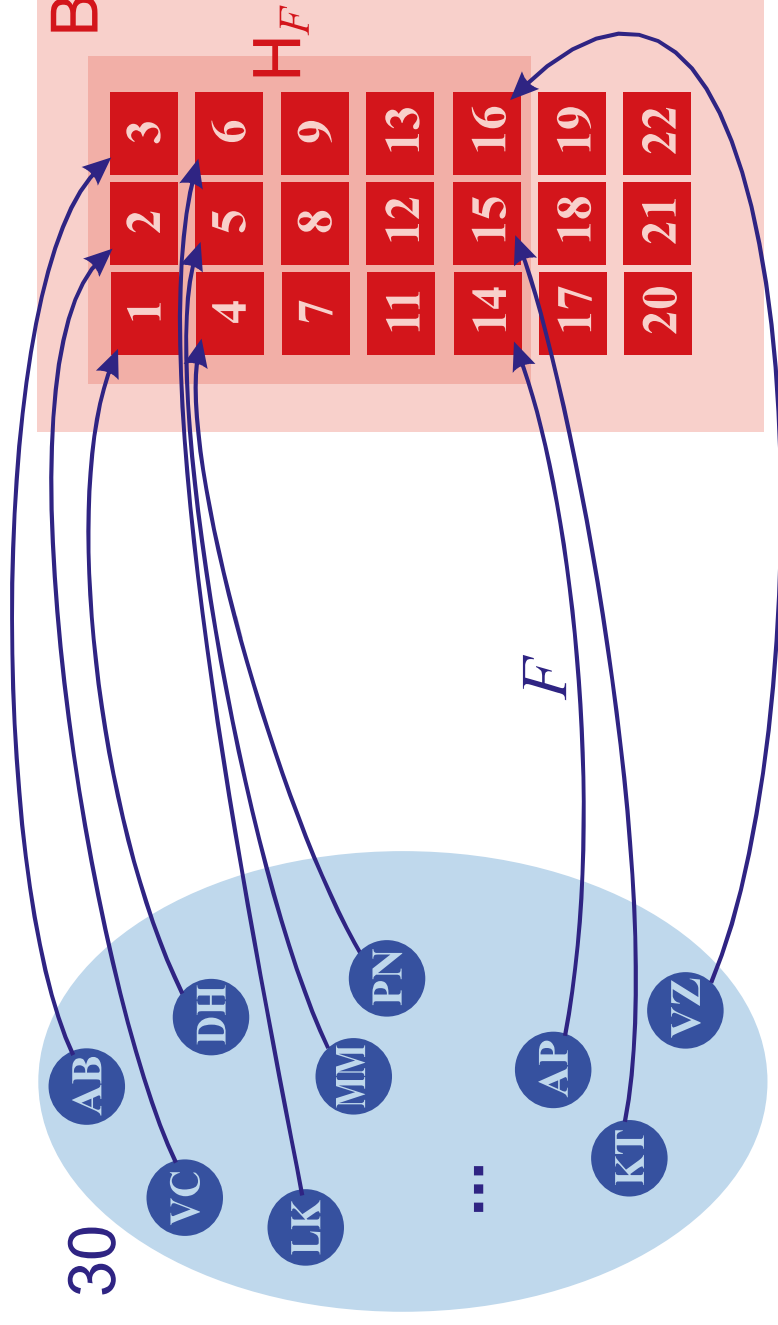
Obor hodnot: obsazené studijní skupiny

Zobrazení: $F = \{[AB, 30], [AT, 30], [DV, 30], \dots, [VN, 39], [AP, 99]\}$

Každý student je přiřazen právě do jedné skupiny (je někam přiřazen, ale nemůže být členem více studijních skupin)

Je to zobrazení, ale nikoli prosté

☛ **Příklad 2.** Zasedací pořádek v učebně:



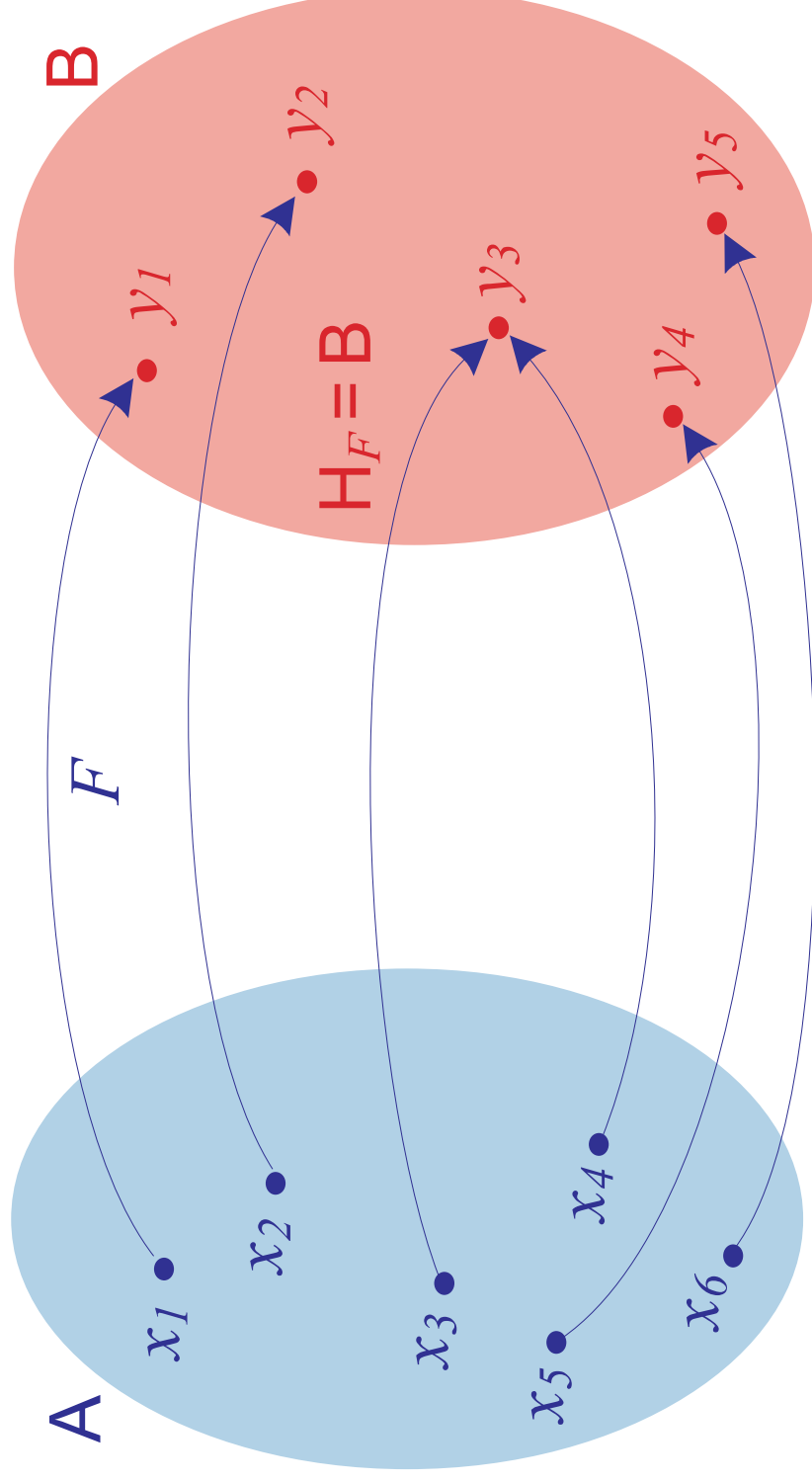
Definiční obor: studenti dané skupiny

Obor hodnot: obsazená místa v učebně

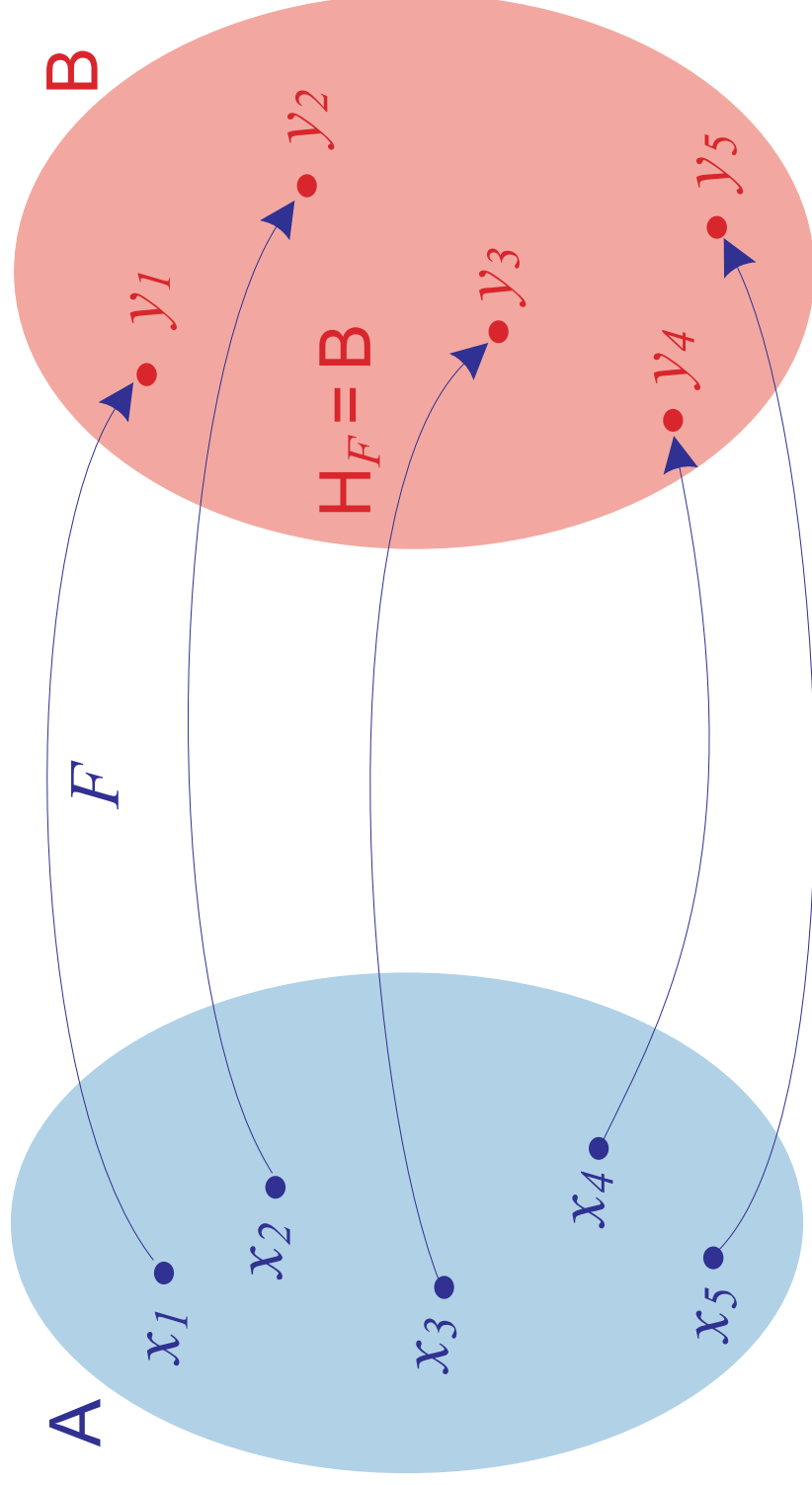
Zobrazení: $F = \{[AB, 1], [VC, 2], [DH, 3], \dots, [VZ, 16]\}$,

Toto zobrazení je prosté: na každém obsazeném místě sedí pouze jeden student (nesedí si na klíně; ze znalosti obrazu jsme schopni jednoznačně říci, kdo na místě seděl)

- ➔ **Zobrazení množiny A na množinu B** je takové zobrazení F , ve kterém je každý prvek množiny B obrazem aspoň jednoho prvku množiny A , tj. $B = H(F)$.

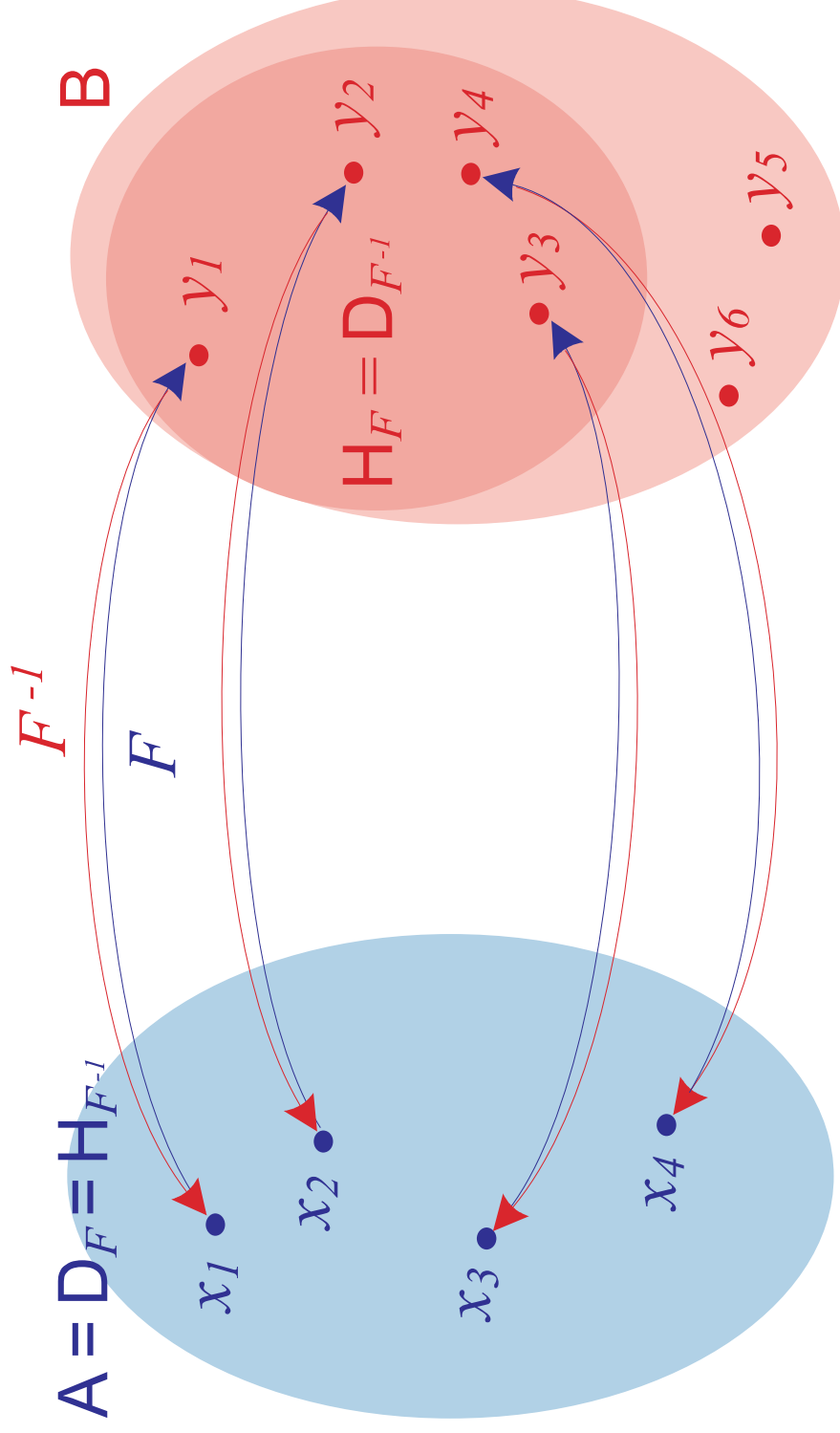


- ➔ **Vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami A , B je prosté zobrazení množiny A na množinu B .**

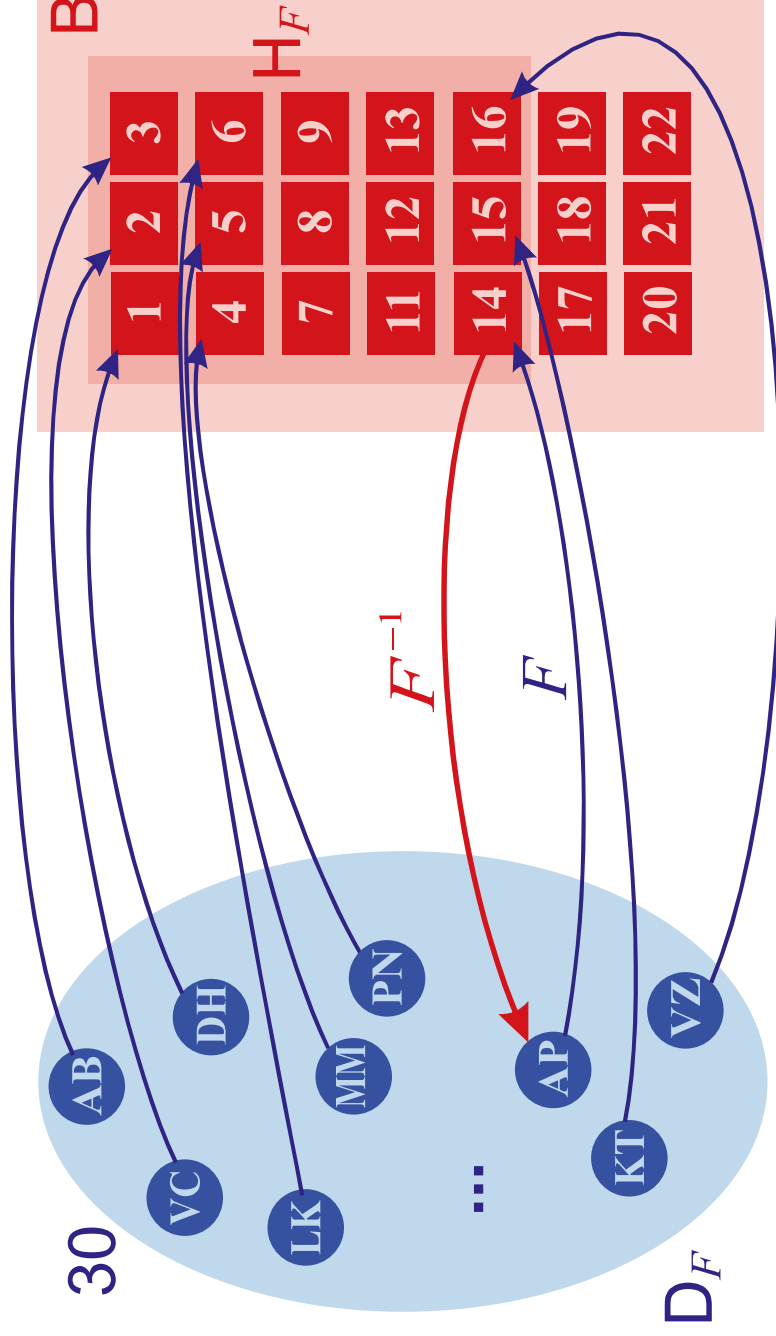


Je-li dané zobrazení F **prosté**, pak k němu existuje právě jedno prosté zobrazení, které ke každému prvku $y \in \mathbf{H}(F)$ přiřazuje jeho vzor $x \in \mathbf{D}(F)$; toto zobrazení se nazývá **inverzní zobrazení k zobrazení F** a značí se symbolem F^{-1} . Platí: $\mathbf{D}(F^{-1}) = \mathbf{H}(F)$, $\mathbf{H}(F^{-1}) = \mathbf{D}(F)$,

$$x = F^{-1}(y) \text{ právě když } y = F(x)$$



☛ **Příklad 3.** Zasedací pořádek v učebně:



Zobrazení F = seznam studentů s přiřazenými místy, tj.

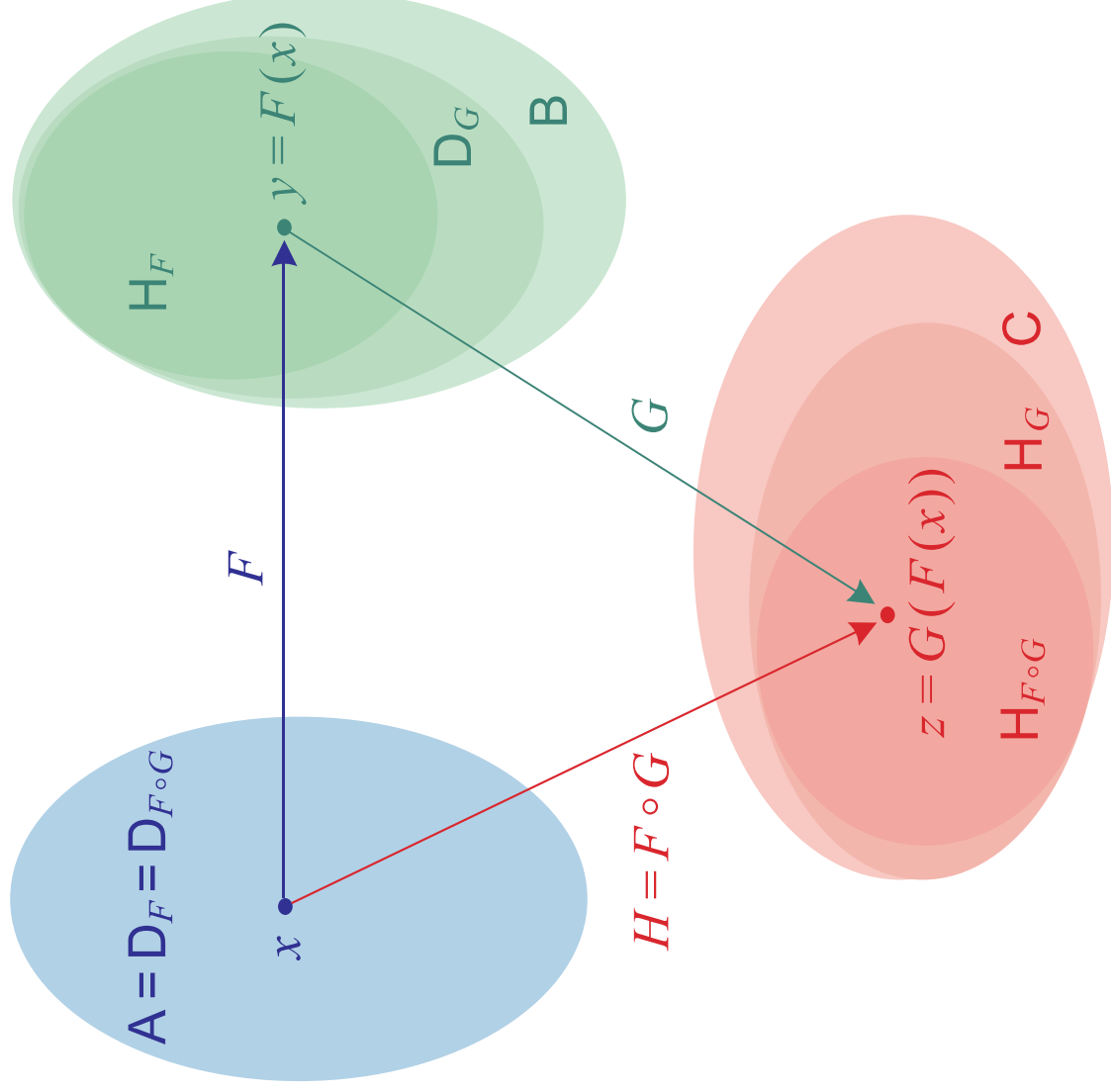
F : student si v seznamu najde určené místo a tam si sedne

Inverzní zobrazení F^{-1} : hygienik při trasování použije stejný seznam, ale obráceně: vyhledá, kdo na určitém místě seděl

Definiční obor: $D_F = H_{F^{-1}}$: studenti dané skupiny

Obor hodnot: $H_F = D_{F^{-1}}$: obsazená místa v učebně

Nechť G a F jsou dvě zobrazení, pro která je $\mathbf{H}_F \subset \mathbf{D}_G$. Zobrazení H se nazývá **kompozicí zobrazení F a G** , je-li $H(x) = G(F(x))$ pro všechna $x \in \mathbf{D}_F$. Kompozice zobrazení F a G (v tomto pořadí) se symbolicky zapisuje $H = F \circ G$.



3.2 Reálná funkce jedné reálné proměnné

Jak je uvedeno v předchozí části, **reálnou funkcí jedné reálné proměnné** se rozumí zobrazení v množině všech reálných čísel $\mathbf{R}$; reálnou funkci budeme zpravidla značit f , vzor x se nazývá **proměnná** nebo **argument funkce** f , obraz y se nazývá **funkční hodnota** nebo **hodnota funkce** f v bodě x a značí se $f(x)$.

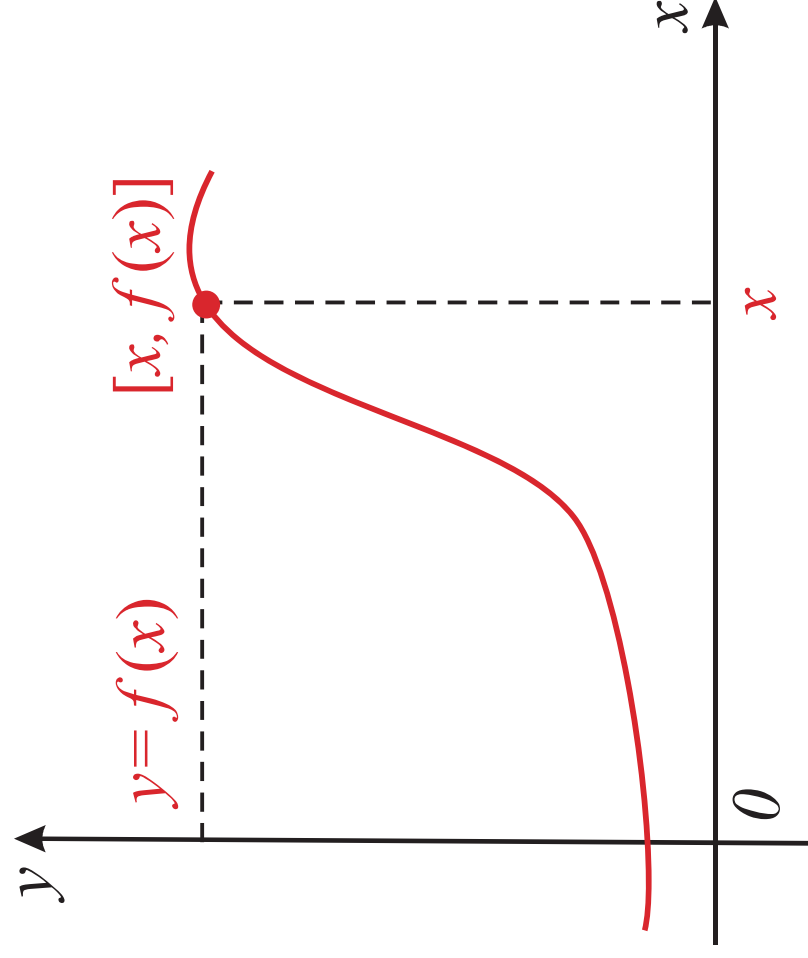
Názornou představu o vlastnostech funkce poskytuje její **grafické vyjádření** neboli **graf funkce**, který sestojíme takto:

V rovině zvolíme pravouhlou soustavu souřadnic s počátkem O a osami x, y . Pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ přiřadíme v této rovině každé uspořádané dvojici reálných čísel $[x, f(x)]$ bod, který má (v uvedeném pořadí) souřadnice $(x, f(x))$. Množina všech takových bodů roviny se nazývá **graf funkce** f :

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbf{D}(f), y = f(x)\}$$

Obsahuje-li definiční obor $\mathbf{D}(f)$ konečný počet hodnot argumentu x , můžeme sestrojit celý graf přesně, bod po bodu. Obsahuje-

li však definiční obor dané funkce nekonečně mnoho hodnot, je nutné graf přibližně dokreslit. Ke správnému nakreslení grafu jsou nezbytné znalosti různých vlastností funkce. Proto se v následujícím podíváme na základní elementární funkce a u každé z nich si připomeneme její **analytické zadání**, tj. **vzorec** či rovnici tvaru $y = f(x)$, kde $f(x)$ je výraz s proměnnou x , a příslušné **grafické zobrazení**.



3.2.1 Vlastnosti a druhy funkcí

Některé funkce mají určité společné vlastnosti, podle kterých je nazýváme. Nejdůležitější z nich jsou následující:

Funkce sudé a liché

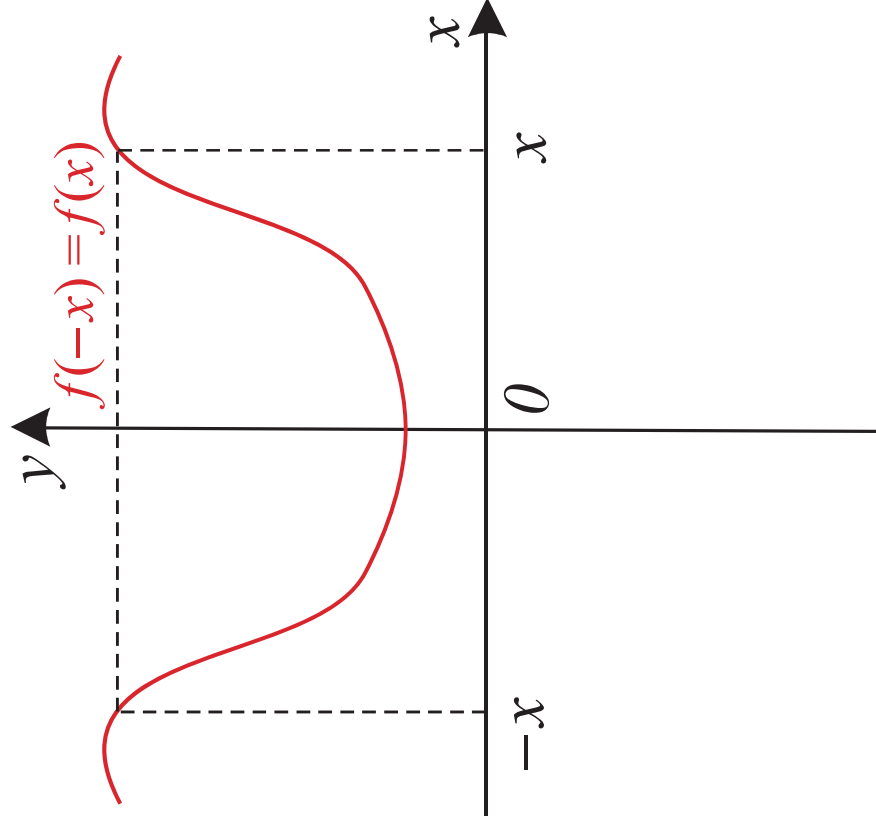
Definice 1. Necht' má funkce f takovou vlastnost, že pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je také $-x \in \mathbf{D}(f)$



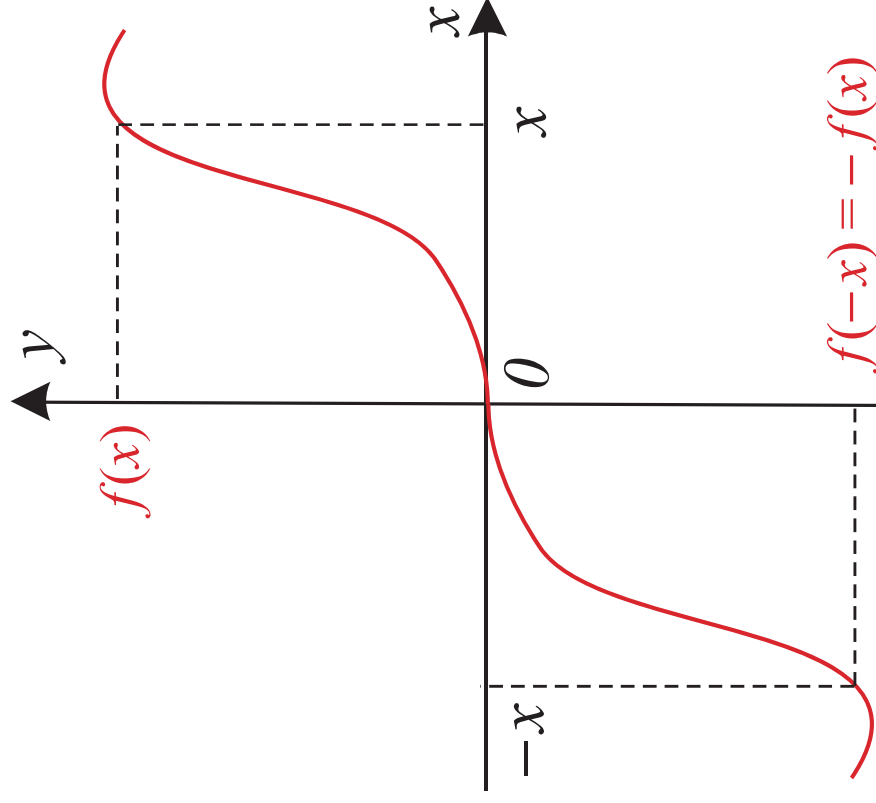
- ➔ Funkce f se nazývá **sudá funkce**, právě když pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je $f(-x) = f(x)$.
- ➔ Funkce f se nazývá **lichá funkce**, právě když pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

Funkce samozřejmě nemusí splňovat ani jednu z podmínek, tedy nemusí být ani sudá, ani lichá.

Funkce sudá:



Funkce lichá:

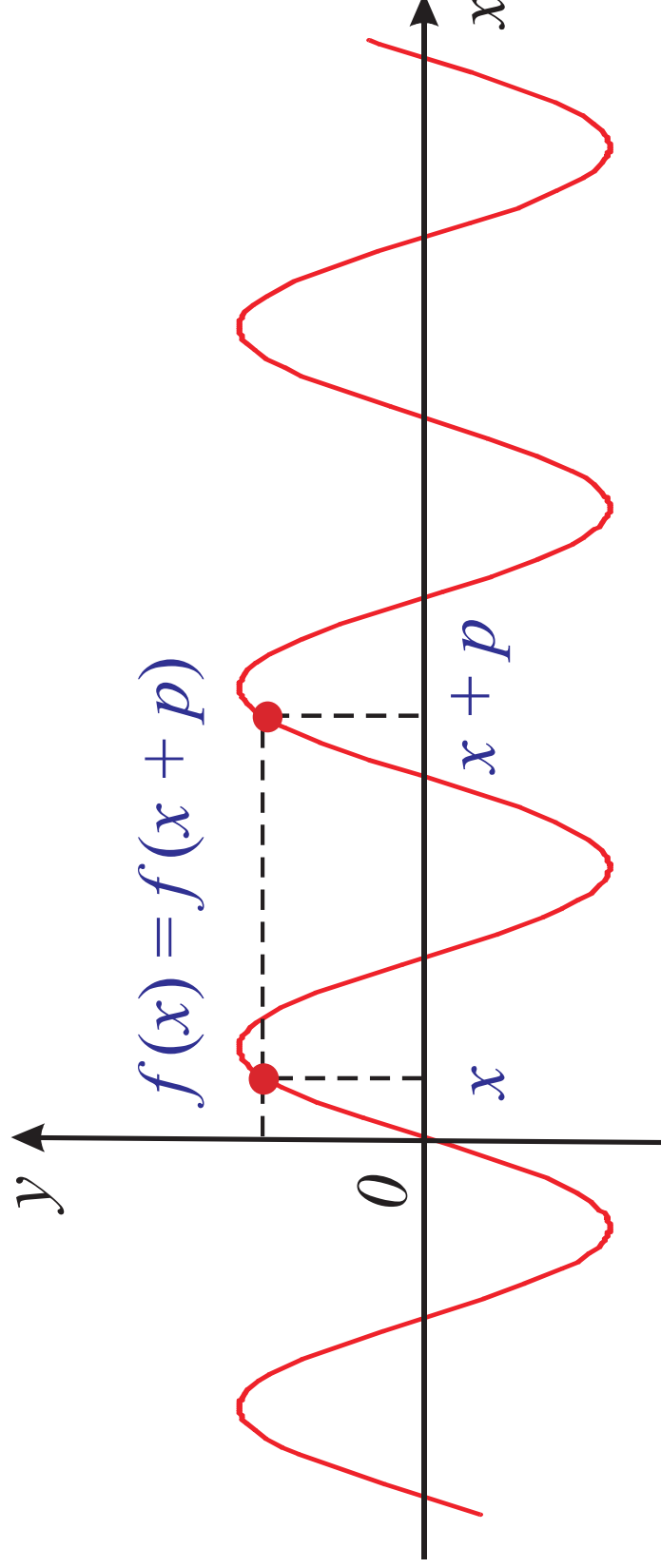


Všimněte si, že v obou případech se v definici vyžaduje, aby byl definiční obor symetrický podle počátku (jinak by nemělo smysl porovnávat hodnoty v bodech $x, -x$).

Funkce periodické



Definice 2. Funkce f se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je také $x \pm p \in \mathbf{D}(f)$ a platí: $f(x \pm p) = f(x)$.

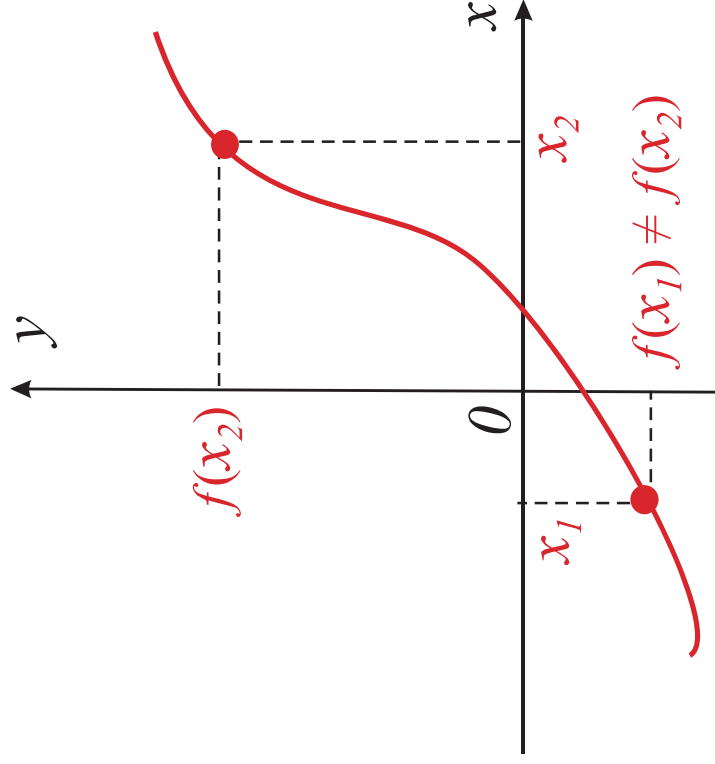


Funkce prosté a funkce k nim inverzní

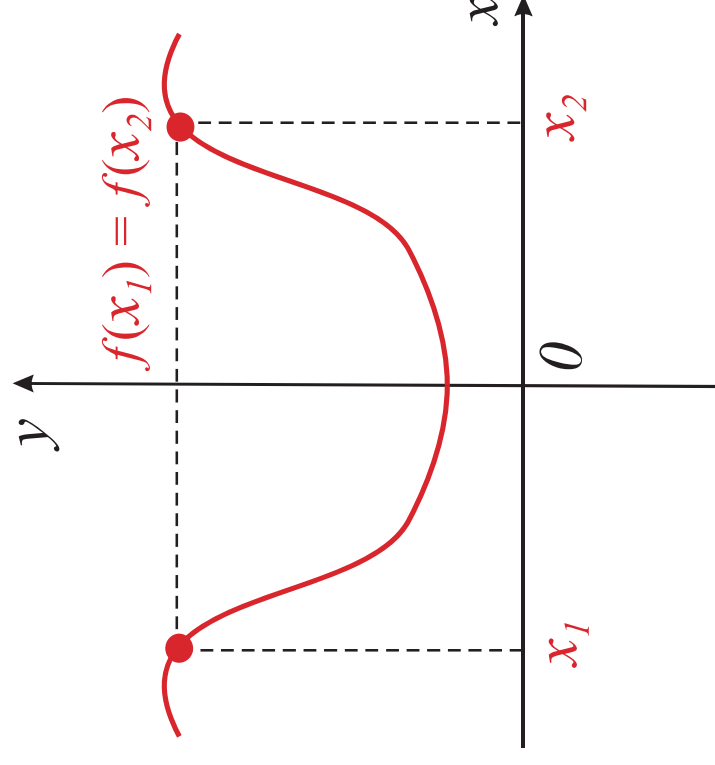
Protože funkce je speciálním případem zobrazení, použije se pro ni stejná definice jako pro prosté zobrazení a zobrazení k němu inverzní.



Definice 3. Funkce f se nazývá **prostá**, jestliže pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in \mathbf{D}_f$, $x_1 \neq x_2$, je také $f(x_1) \neq f(x_2)$.



Funkce prostá

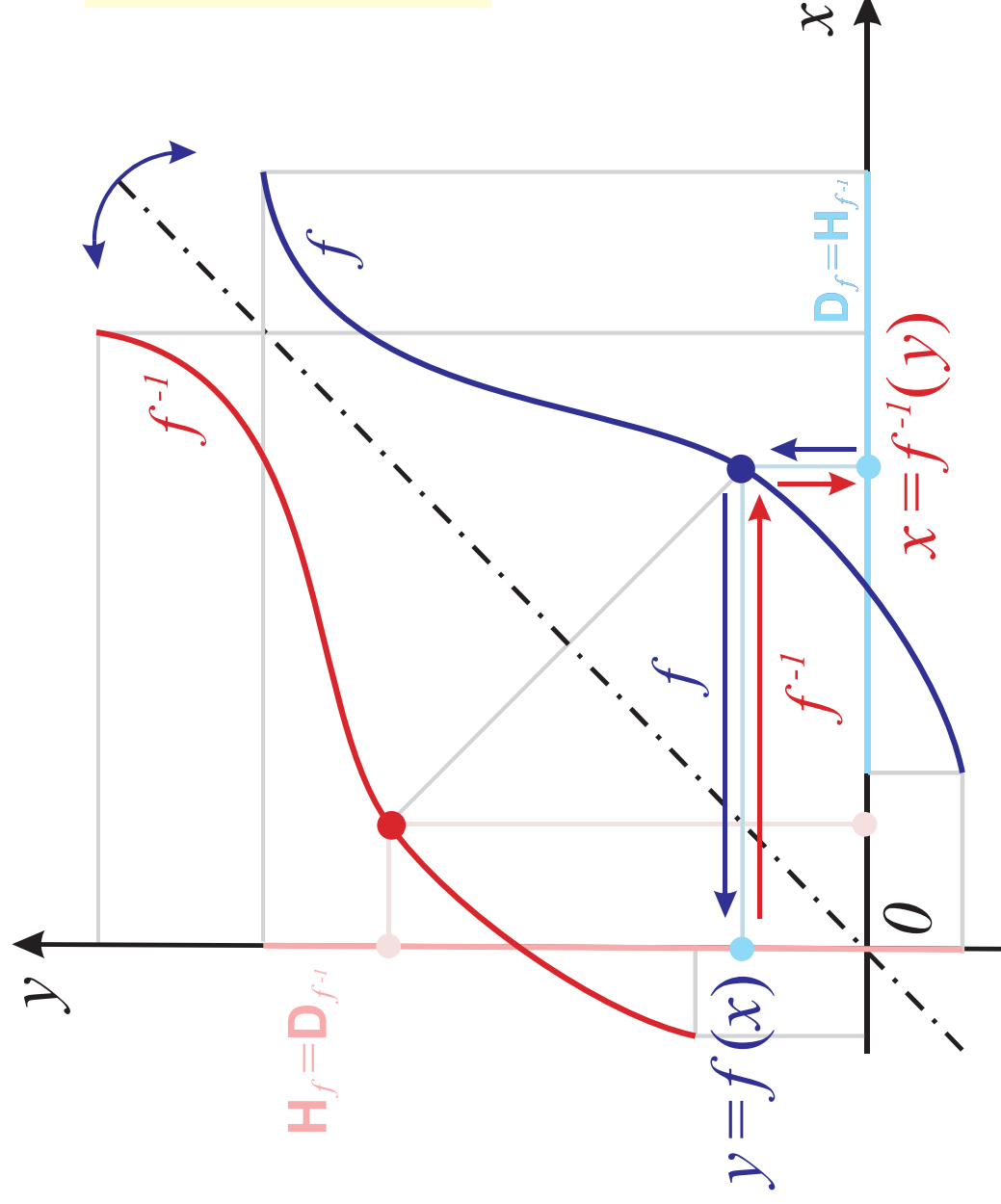


Funkce, která není prostá



Definice 4. Je-li funkce f prostá, pak se **inverzní funkcí** f^{-1} nazývá funkce, která každému prvku $y \in \mathbf{H}_f$ přiřazuje jeho vzor $x \in \mathbf{D}_f$:

$$x = f^{-1}(y) \text{ právě když } y = f(x).$$



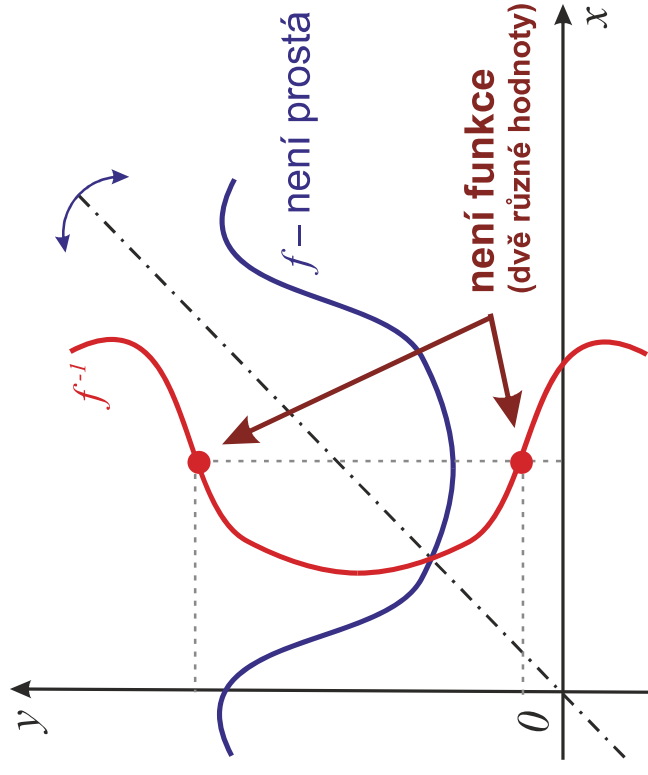
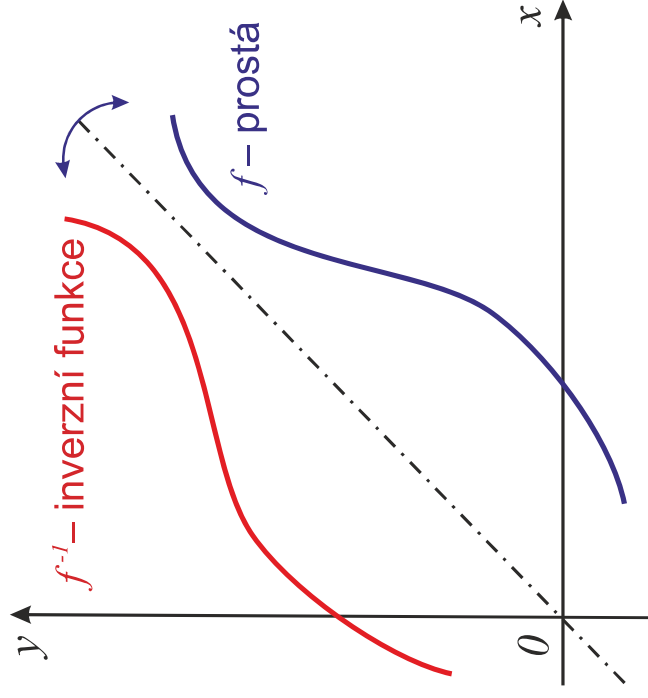
platí:

$$\mathbf{D}_f = \mathbf{H}_{f^{-1}}$$

$$\mathbf{H}_f = \mathbf{D}_{f^{-1}}$$

Při sestavování grafu inverzní funkce pak vyneseme proměnou jako obvykle na osu x a hodnoty na osu y – oproti grafu původní funkce si tak souřadnicové osy „vymění role“; graf inverzní proto bude symetrický s grafem původní funkce f v osově souměrnosti podle osy prvního a třetího kvadrantu.

Uvědomme, že inverzní funkce existuje jen pro funkci prostou – pro funkci, která není prostá, nebude křivka vzniklá osovou souměrností grafem funkce:



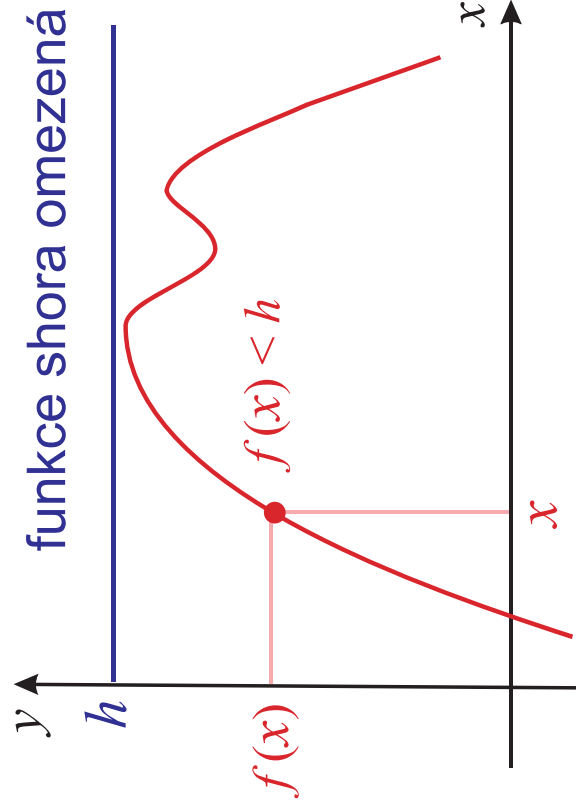
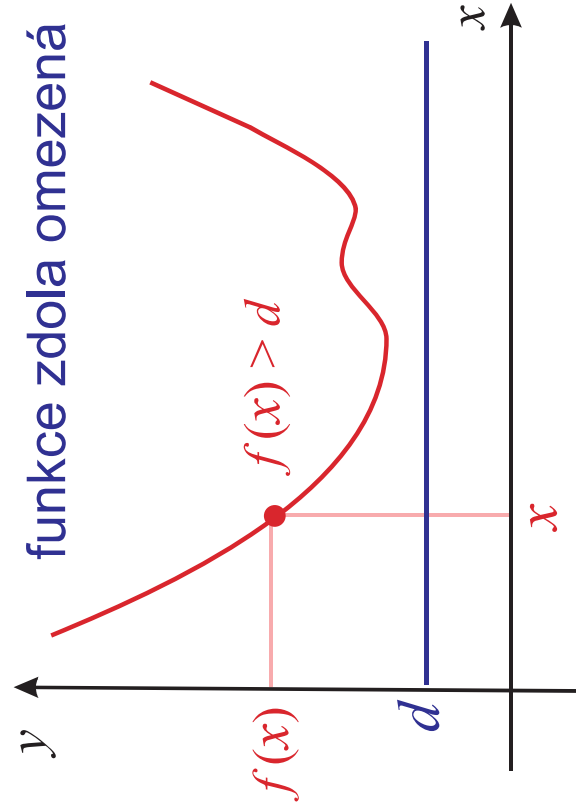
Funkce omezené, zdola omezené, shora omezené



Definice 5. Uvažujeme funkci f a podmnožinu $\mathbf{M} \subset \mathbf{D}_f$.

- ➔ Funkce f se nazývá **zdola omezená na množině $\mathbf{M}$** , existuje-li $d \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in \mathbf{M}$ je $f(x) \geq d$.
- ➔ Funkce f se nazývá **shora omezená na množině $\mathbf{M}$** , existuje-li $h \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in \mathbf{M}$ je $f(x) \leq h$.
- ➔ Funkce f se nazývá **omezená na množině $\mathbf{M}$** , je-li omezená zdola i shora na $\mathbf{M}$.

Je-li $\mathbf{M} = \mathbf{D}_f$, řekneme, že **funkce je omezená (zdola, shora).**



Funkce monotónní

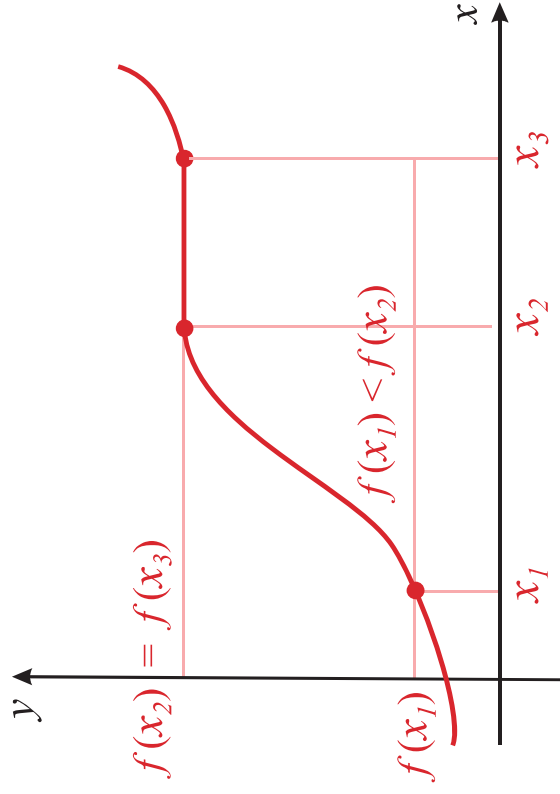
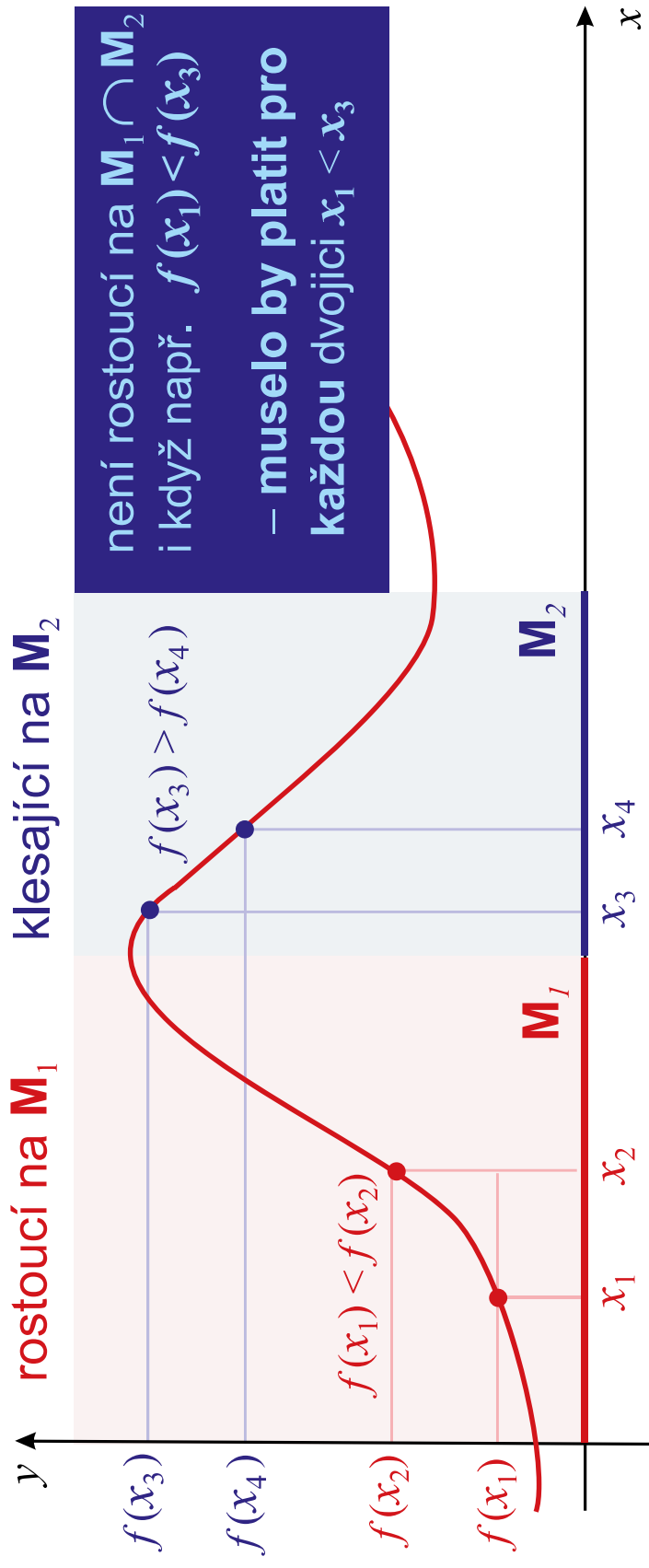


Definice 6. Uvažujme funkci f a podmnožinu $\mathbf{M} \subset \mathbf{D}(f)$.

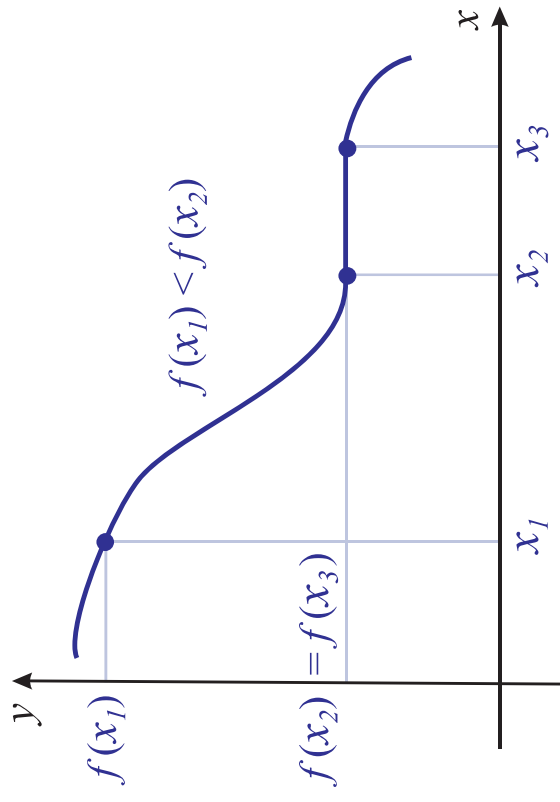
Funkce f se nazývá

- ➔ **rostoucí na množině $\mathbf{M}$** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.
- ➔ **klesající na množině $\mathbf{M}$** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.
- ➔ **neklesající na množině $\mathbf{M}$** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- ➔ **nerostoucí na množině $\mathbf{M}$** , právě když pro každé $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Rostoucí a klesající funkce se souhrnně nazývají **ryze monotónní** (na dané množině); neklesající a nerostoucí se souhrnně nazývají **monotónní** (na dané množině).



neklesající



nerostoucí

Snadno si můžeme rozmyslet, že je-li funkce pouze rostoucí nebo pouze klesající na dané množině, pak nemůže stejné hodnoty nabývat ve dvou různých bodech, a je tedy prostá:

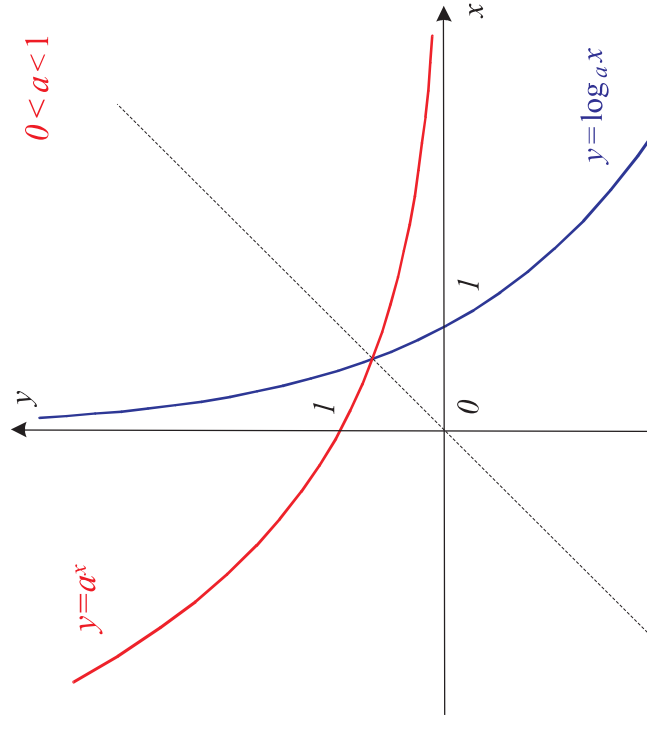
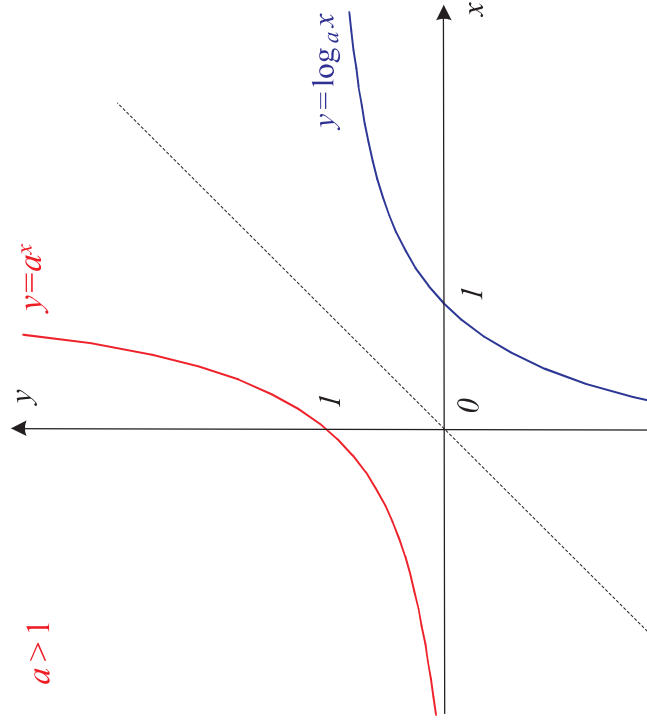


Věta 1. Je-li funkce f ryze monotónní na množině M , pak je na této množině prostá.

Dále platí:



Věta 2. Necht' je funkce $f : X \rightarrow Y$ **rostoucí (klesající)** funkce zobrazující množinu X na Y . Pak je její inverzní funkce $f^{-1} : Y \rightarrow X$ také **rostoucí (klesající)**.

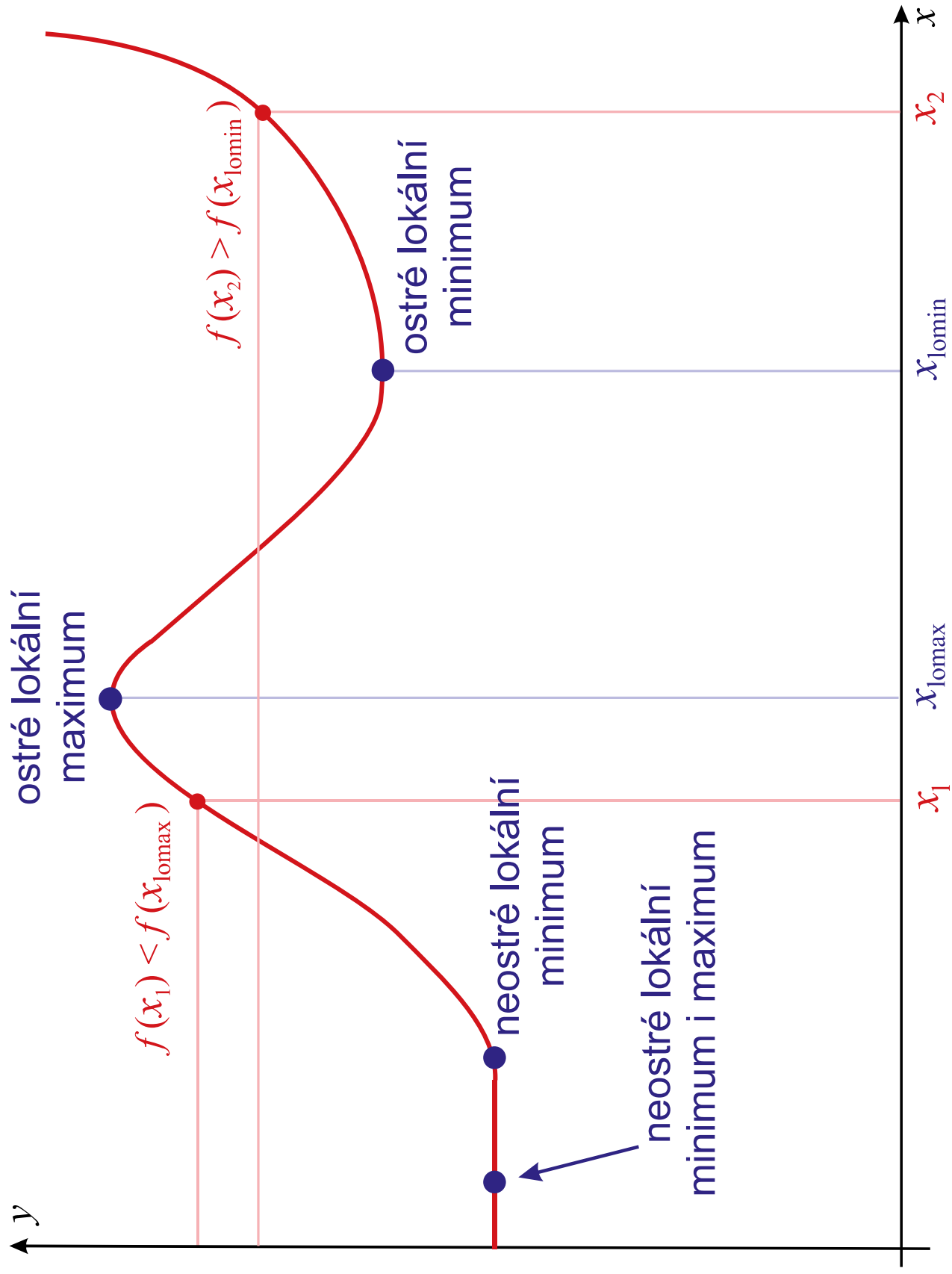


Lokální extrémy

Definice 7. Řekneme, že funkce f má bodě $x_0 \in \mathbf{D}(f)$

- ➔ **ostré lokální maximum**, jestliže existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $f(x_0) > f(x)$,
- ➔ **ostré lokální minimum**, jestliže existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $f(x_0) < f(x)$,
- ➔ **neostré lokální maximum**, jestliže existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $f(x_0) \geq f(x)$,
- ➔ **neostré lokální minimum**, jestliže existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $f(x_0) \leq f(x)$.

Lokální maxima a minima se také nazývají **lokální extrémy**.



Globální extrémy

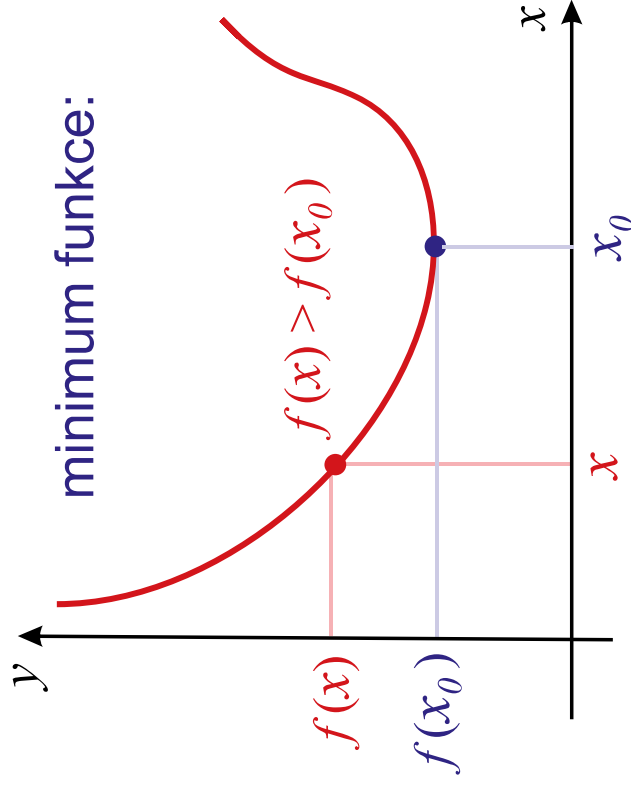
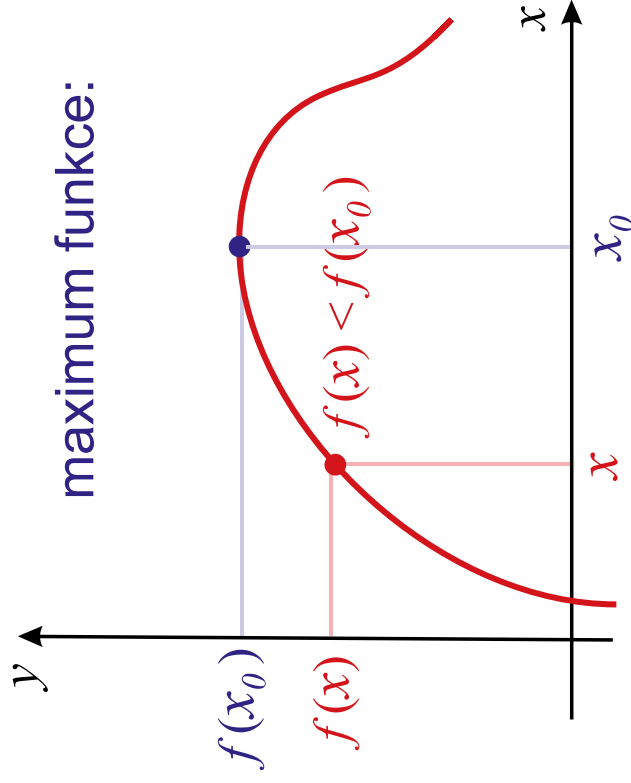
Definice 8. Řekneme, že funkce f má bodě $x_0 \in \mathbf{M} \subset \mathbf{D}(f)$

- ➔ **ostré globální maximum na množině $\mathbf{M}$,**
jestliže pro každé $x \in \mathbf{M}$, $x \neq x_0$, platí: $f(x_0) > f(x)$,
- ➔ **ostré globální minimum na množině $\mathbf{M}$,**
jestliže pro každé $x \in \mathbf{M}$, $x \neq x_0$, platí: $f(x_0) < f(x)$,
- ➔ **neostré globální maximum na množině $\mathbf{M}$,**
jestliže pro každé $x \in \mathbf{M}$ platí: $f(x_0) \geq f(x)$,
- ➔ **neostré globální minimum na množině $\mathbf{M}$,**
jestliže pro každé $x \in \mathbf{M}$ platí: $f(x_0) \leq f(x)$.

Globální maxima a minima se také nazývají **globální extrémy**.

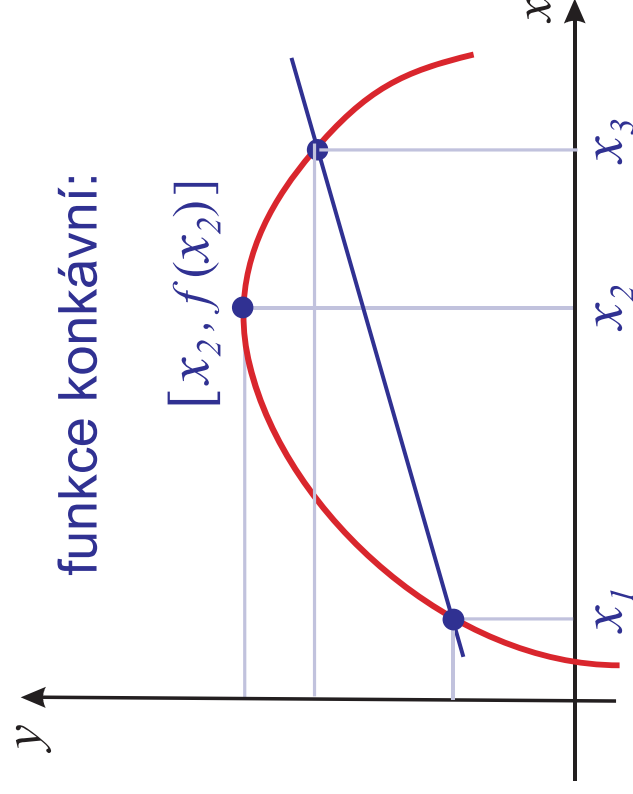
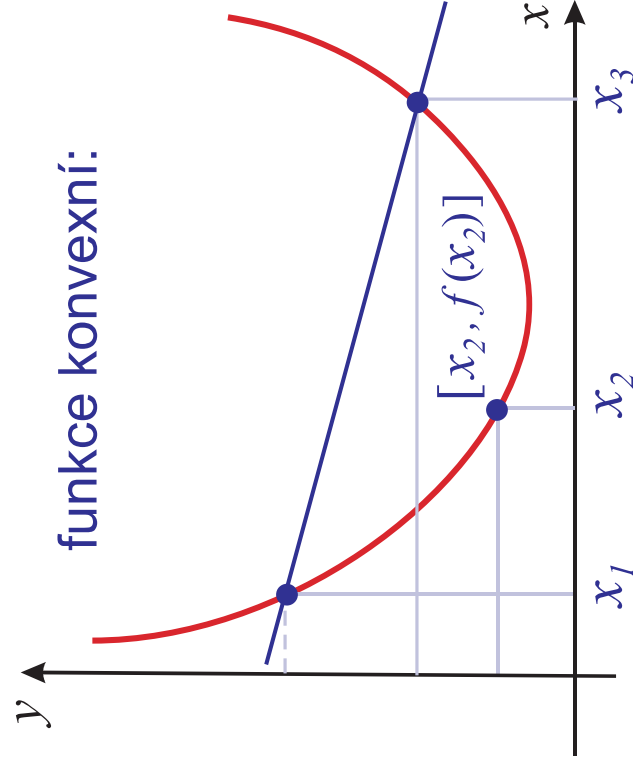
Neostře globální maximum (minimum) funkce f na množině **M** se také nazývá krátce **maximum (minimum) funkce f na množině M** .

Je-li **$M = D_f$** , hovoříme krátce o **maximu (minimu) funkce f** .



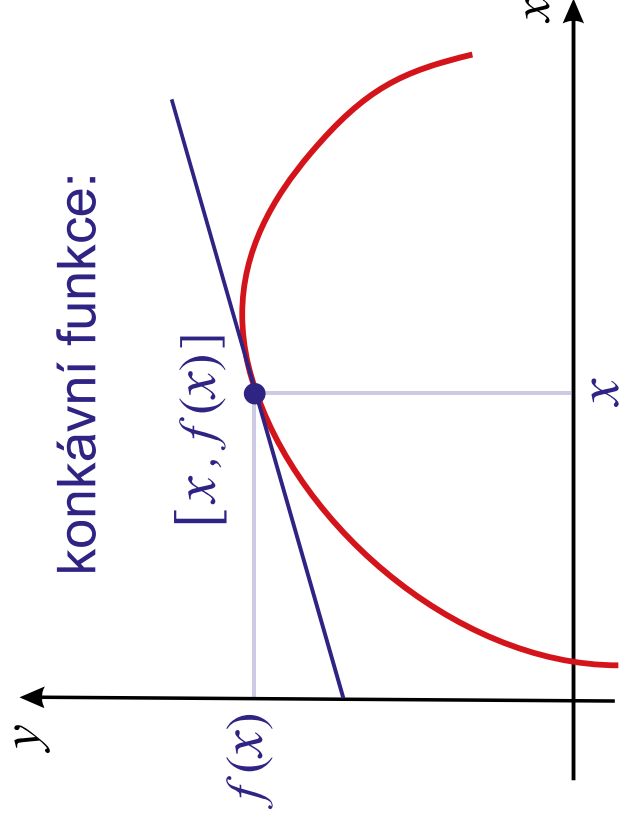
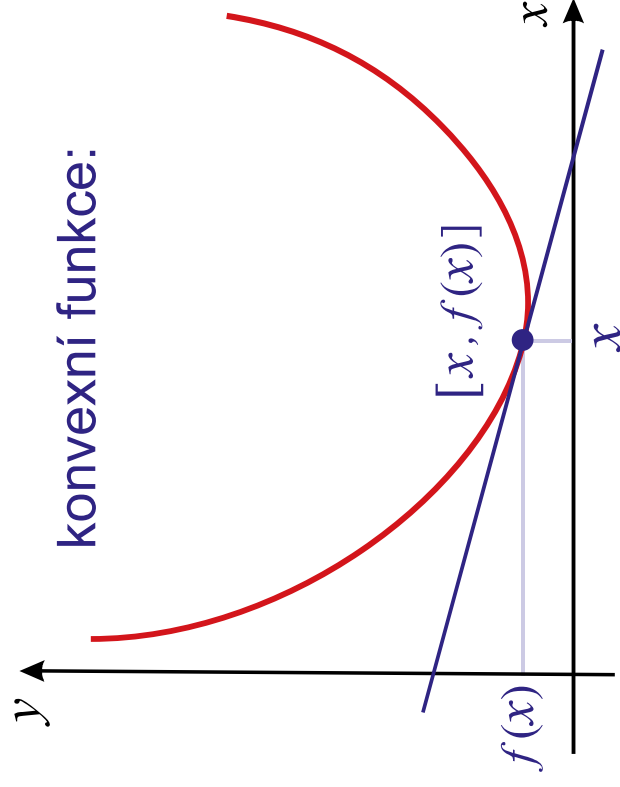
Definice 9. Necht' je $I \subset \mathbb{R}$ interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, kde $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $A = [x_2, y]$ přímky procházející body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_3; f(x_3)]$

- ➡ nad bodem grafu funkce $[x_2, f(x)]$, nazývá se funkce **f konvexní na intervalu I** ,
- ➡ pod bodem grafu funkce $[x_2, f(x)]$, nazývá se funkce **f konkávní na intervalu I** .



Jinak také můžeme říci, že funkce f je

- ➔ **konvexní na intervalu I** , jestliže graf funkce f na intervalu I leží **nad tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x \in I$** ,
- ➔ **konkávní na intervalu I** , jestliže graf funkce f na intervalu I leží **pod tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x \in I$** .

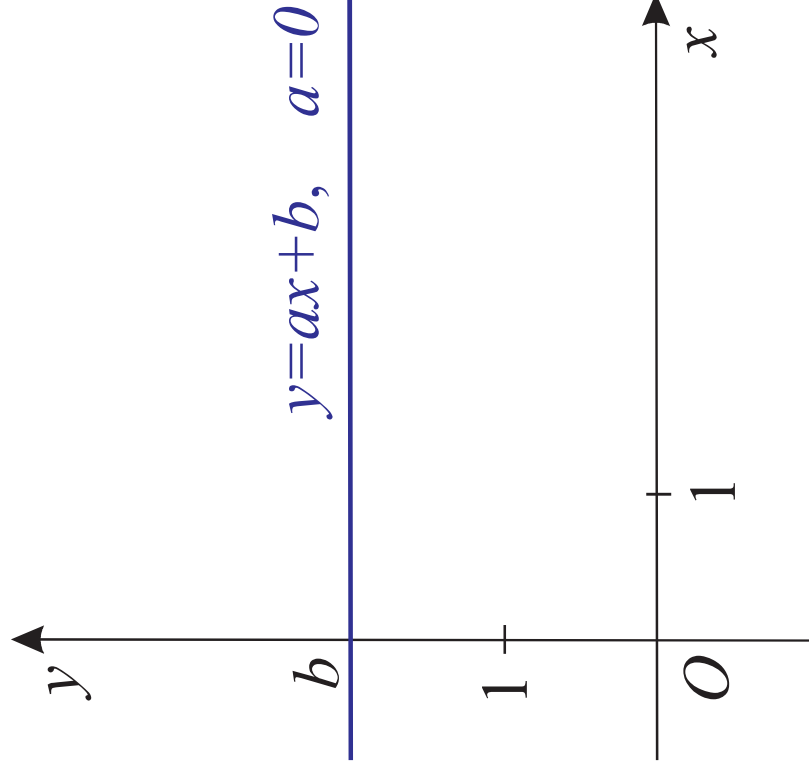


3.2.2 Základní elementární funkce

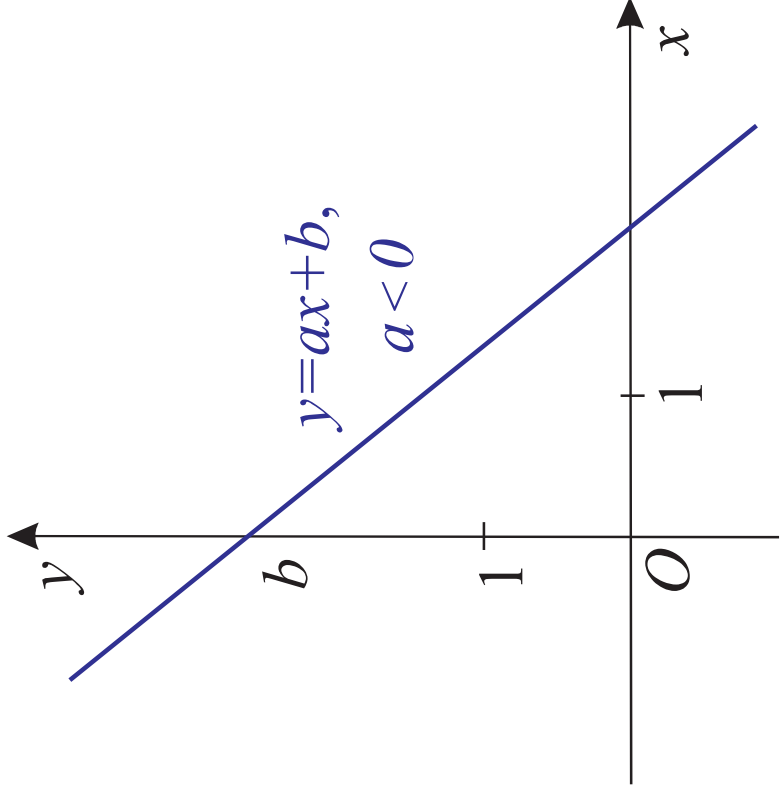
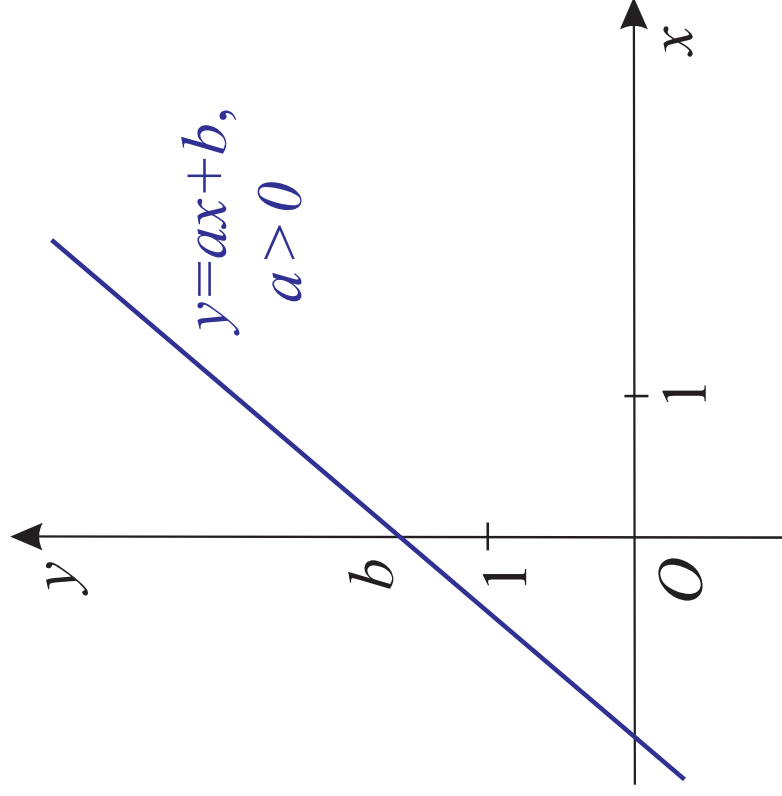
Lineární funkce

Lineární funkcí nazýváme každou funkci

$$f : y = ax + b, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}. \quad (3.1)$$



$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathbf{H}(f) = \{b\}$, nerostoucí a neklesající, není prostá



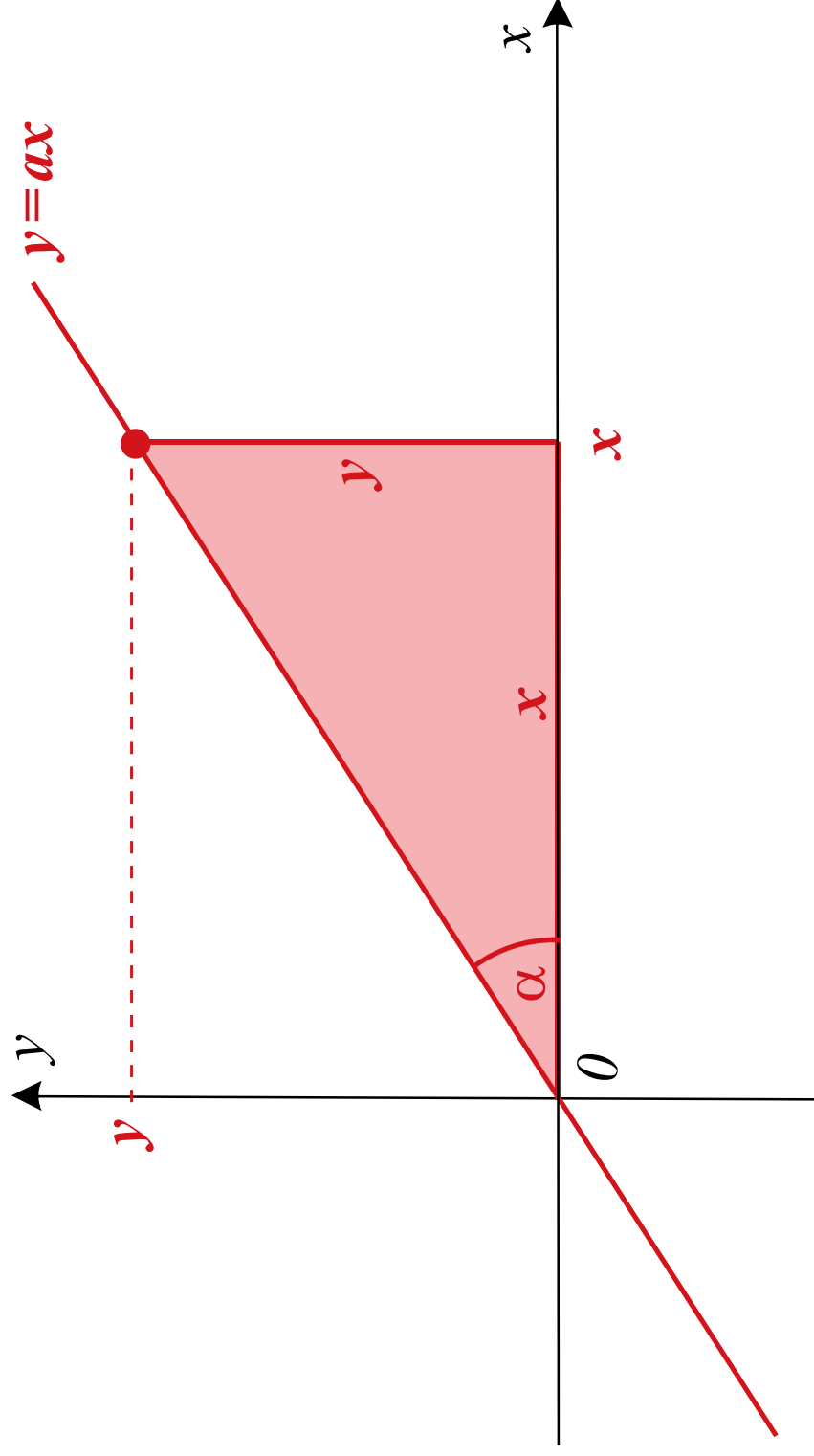
$$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}, \mathbf{H}(f) = \mathbb{R}$$

není ani shora, ani zdola omezená

rostoucí
prostá

klesající
prostá

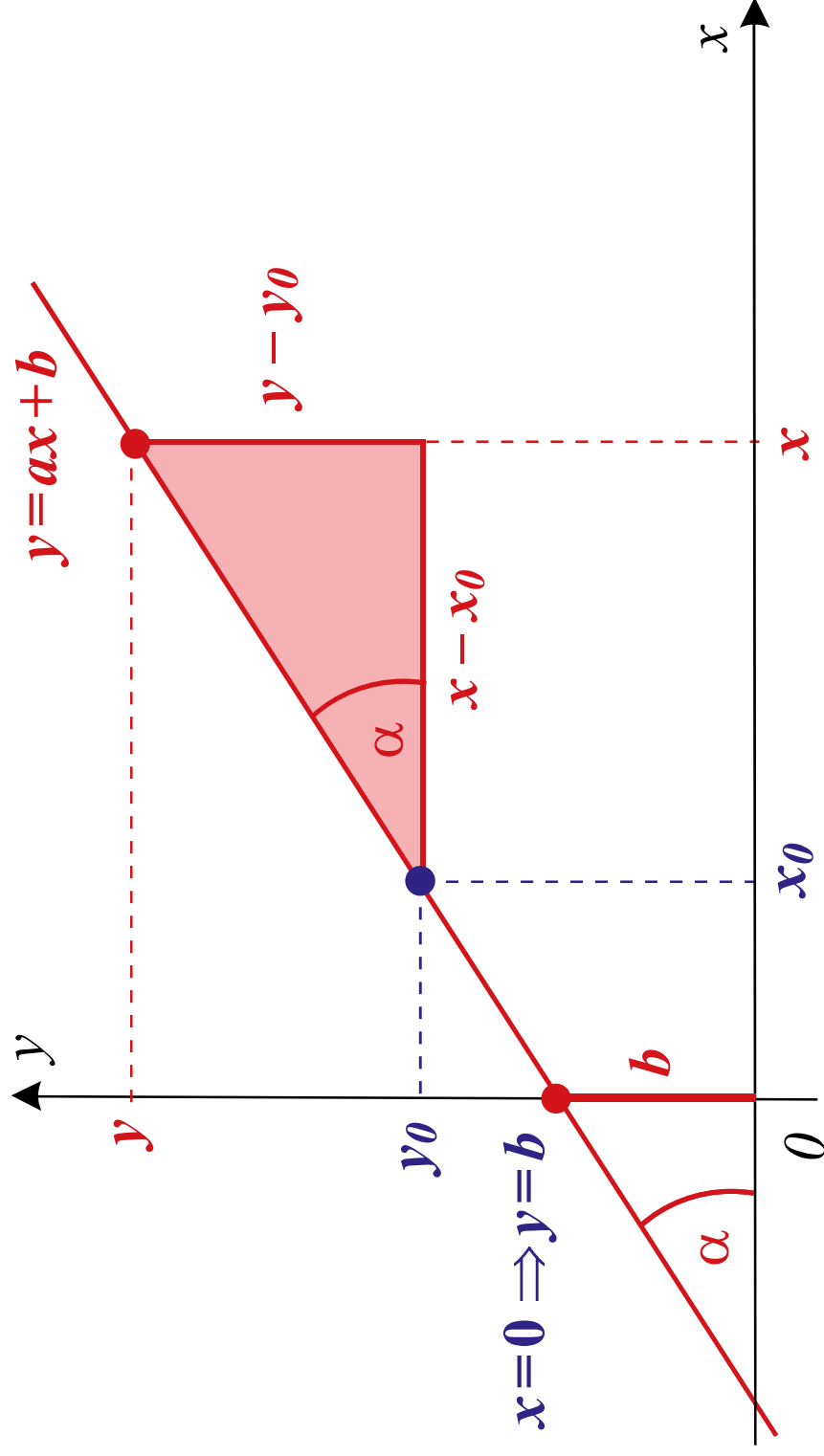
Směrnice přímky:



Směrnice:

$$a = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$$

Směrnice přímky:



$$\left. \begin{array}{l} y_0 = ax_0 + b \\ y = ax + b \end{array} \right\} \Rightarrow y - y_0 = a(x - x_0)$$



Směrnice:

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \operatorname{tg} \alpha$$

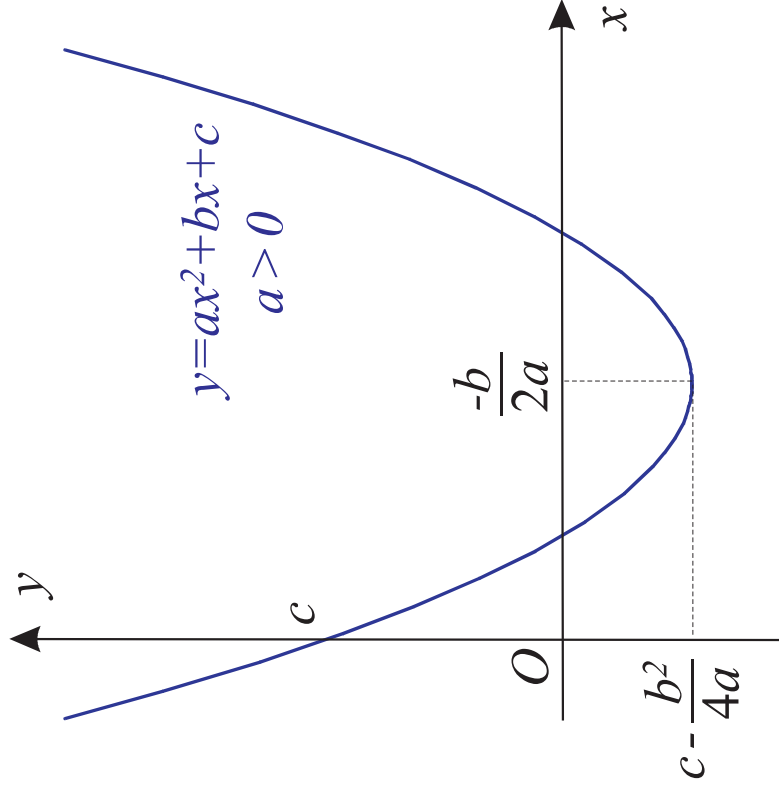
Kvadratická funkce

Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci

$$f : y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Grafem každé kvadratické funkce je **parabola**, která je souměrná podle osy o rovnoběžné s osou y .

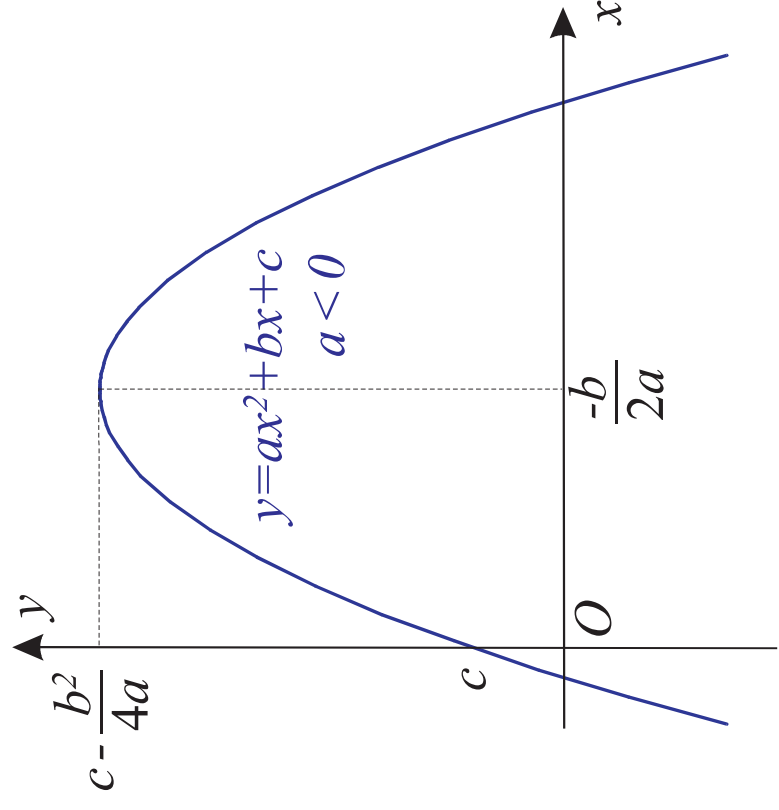
Průsečíku osy paraboly s parabolou se říká **vrchol paraboly** a přímce kolmé k ose paraboly, procházející jejím vrcholem, se říká **vrcholová tečna paraboly**.



$$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}, \mathbf{H}(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}, +\infty \right\rangle$$

zdola omezená, není shora omezená

$$\begin{aligned} &\text{klesající v } \left\langle -\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle \\ &\text{rostoucí v } \left\langle -\frac{b}{2a}, +\infty \right\rangle \end{aligned}$$



$$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}, \mathbf{H}(f) = \left\langle -\infty, c - \frac{b^2}{4a} \right\rangle$$

shora omezená, není zdola omezená

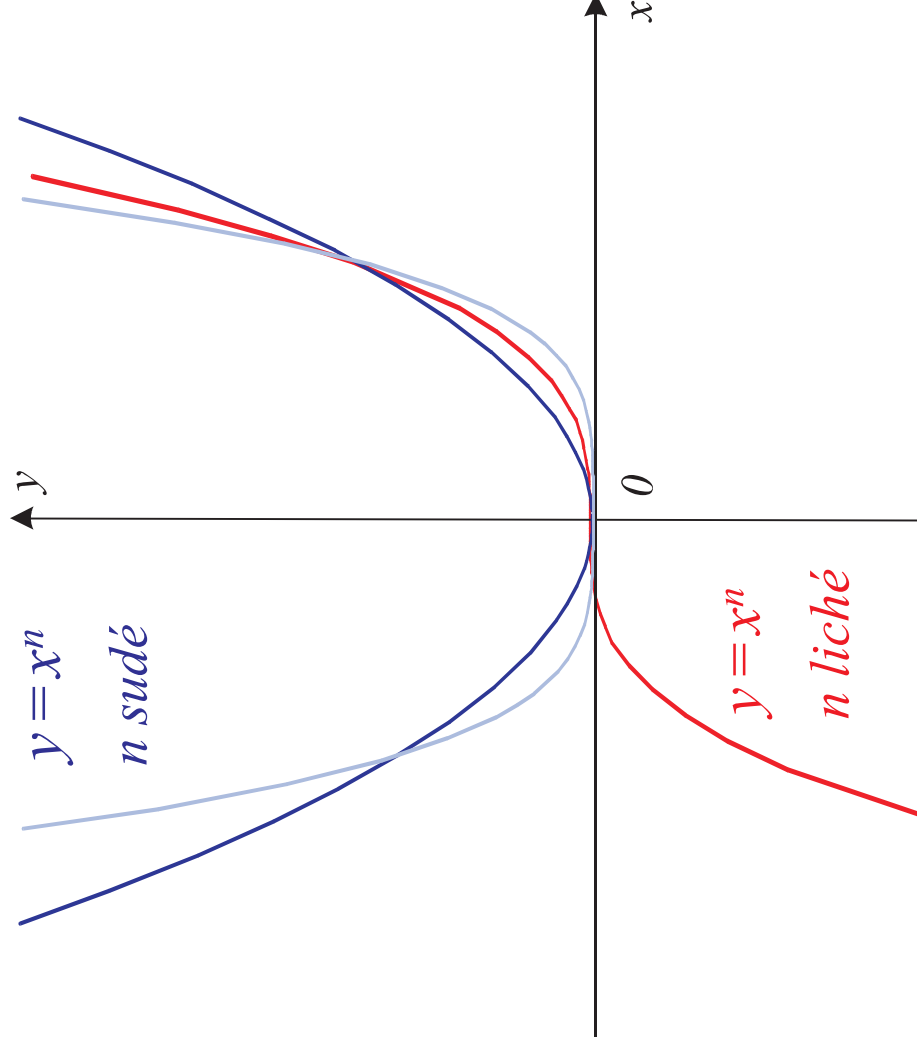
$$\begin{aligned} &\text{rostoucí v } \left\langle -\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle \\ &\text{klesající v } \left\langle -\frac{b}{2a}, +\infty \right\rangle \end{aligned}$$

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem je funkce

$$f : y = x^n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Je-li speciálně $n = 1$, je f lineární funkce; je-li $n = 2$ je to funkce kvadratická. Pro $n > 1$ je grafem **parabola n -tého stupně**.



Pomocí algebraických operací násobení číslem a sčítání funkcí $f(x) = x^n$ získáme *polynomy*.

Polynomem nazýváme funkci $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Není-li polynom identicky roven nule, existuje největší n takové, že $a_n \neq 0$. Toto n nazýváme **stupeň** polynomu. V dalším budeme předpokládat, že je polynom $P(x)$ nenulový a že má stupeň n . **Nulovým bodem** neboli **kořenem** polynomu P se rozumí bod $x_0 \in \mathbb{R}$, pro který

$$P(x_0) = 0.$$

Je-li x_1 nulový bod polynomu $P(x)$ stupně n , ze psát

$$P(x) = (x - x_1) P_1(x),$$

kde $P_1(x)$ je polynom stupně $(n - 1)$. Má-li polynom $P_1(x)$ kořen x_2 , je $P_1(x) = (x - x_2) P_2(x)$, a tedy

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) P_2(x),$$

kde $P_2(x)$ je polynom stupně $(n-2)$. Jestliže pokračujeme uvedeným postupem dostaneme nulové body $x_1, x_2, \dots, x_N$, z nichž se některé mohou vyskytovat vícekrát. Polynom $P(x)$ lze pak zapsat ve tvaru

$$P(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r} P_N(x),$$

kde $x_1, \dots, x_r$ jsou navzájem různé kořeny polynomu $P(x)$, přirozená čísla k_i se nazývají *násobnost kořene* x_i a platí pro ně $N = k_1 + k_2 + \dots + k_r$, a $P_N(x)$ je polynom stupně $(n - N)$, který nemá reálné kořeny.

Obecně lze libovolný polynom stupně n zapsat ve tvaru

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s},$$

kde polynomy $x^2 + p_ix + q_i$ nemají reálný kořen a

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2m_1 + \dots + 2m_s = n.$$

Lineární lomené funkce jsou funkce tvaru

$$f : f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{kde} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Je-li $c = 0$, jedná se o lineární funkci. Proto budeme dále předpokládat, že $c \neq 0$. Protože rovnost $cx + d = 0$ platí pouze pro $x = -\frac{d}{c}$, je definiční obor lineární lomené funkce $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Lineární lomenou funkci lze upravit na tvar

$$f(x) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \frac{1}{x + d/c}.$$

Tedy pro $ad - bc = 0$ je tato funkce rovna konstantní funkci. Proto budeme navíc předpokládat, že $ad - bc \neq 0$. Obecnou lineární lomenou funkci lze získat také složením tří jednodušších funkcí $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kde f_1 je lineární funkce $f_1(x) = x + \frac{d}{c}$, funkce $f_2 = \frac{1}{x}$ a funkce f_3 je opět lineární funkce $f_3(x) = -\frac{ad - bc}{c^2} x + \frac{a}{c}$. Z těchto funkcí jsme podrobněji nepopsali pouze funkci $f_2(x) =$

$\frac{1}{x}$. Tato funkce vyjadřuje vztah nepřímé úměry mezi x a y . Je definována na intervalech $(-\infty, 0)$, kde je klesající a na intervalu $(0, +\infty)$ kde je také klesající. Ale je třeba upozornit, že tato funkce není klesající na celém svém definičním oboru. Funkce je lichá a její graf je rovnoosá *hyperbola* se středem v počátku, jejíž asymptoty jsou souřadnicové osy.

Je-li $ad - bc > 0$ je obecná lineární lomená funkce $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ klesající na intervalech $(-\infty, -d/c)$ a $(d/c, +\infty)$. Je-li $ad - bc < 0$ je funkce na těchto intervalech rostoucí. Grafem je hyperbola se středem v bodě $\left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$, jejíž asymptoty jsou přímky $x = -\frac{d}{c}$ a

$y = \frac{a}{c}$. Graf funkce protíná osu Ox v bodě $x = -\frac{b}{a}$ a osu Oy v bodě $y = \frac{b}{d}$.

Lineární lomená funkce $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ je prostá a její inverzní funkce je opět lineární lomená funkce $y = \frac{dx - b}{-cx + a}$.

Racionální funkce jsou funkce tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy.

Označíme-li X_0 množinu všech reálných nulových bodů polynomu $Q(x)$, je definiční obor $D_f = \mathbb{R} \setminus X_0$.

Je-li stupeň polynomu $P(x)$, n , větší nebo roven stupni m polynomu $Q(x)$, lze dělením zjistit, že tuto funkci je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $P_1(x)$ je polynom stupně $(n - m)$ a stupeň polynomu $Q(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$.

Funkci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde je stupeň polynomu $P(x)$ menší než stupeň polynomu $Q(x)$, lze zapsat jako součet jednodušších ra-

cionálních funkcí. Předpokládejme, že

$$q(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots \\ \dots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s},$$

kde dvojčleny $x^2 + p_i x + q_i$ nemají reálné kořeny, tj. platí $p_i^2 - 4q_i <$

0. Pak lze racionální funkci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ psát ve tvaru:

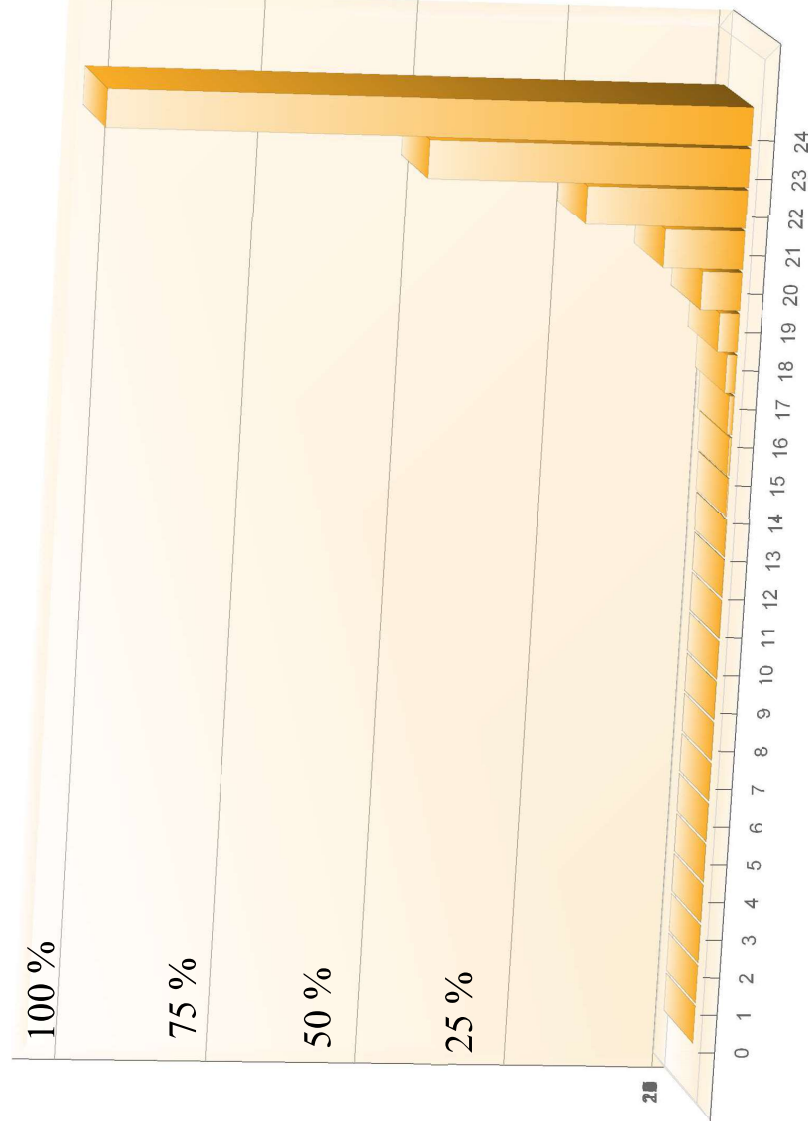
$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \\ & + \frac{A_{21}}{x - x_2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_{r1}}{x - x_r} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(x - x_r)^{k_r}} \\ & + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1m_1}x + C_{1m_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}} \\ & + \dots + \\ & + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2 + p_sx + q_s} + \frac{B_{s2}x + C_{s2}}{(x^2 + p_sx + q_s)^2} + \dots + \frac{B_{sm_s}x + C_{sm_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}} \end{aligned}$$

Tomuto zápisu se říká **rozklad na parciální zlomky**.

Exponenciální funkce

☛ *Příklad 4.* Lekníny na rybníce

Představte si jezero, kde roste jeden leknín. Jedná se o druh, který každoročně zdvojnásobí svůj počet. Po 22 letech bude jezero pokryté z jedné čtvrtiny. Za jak dlouho bude pokryté celé?



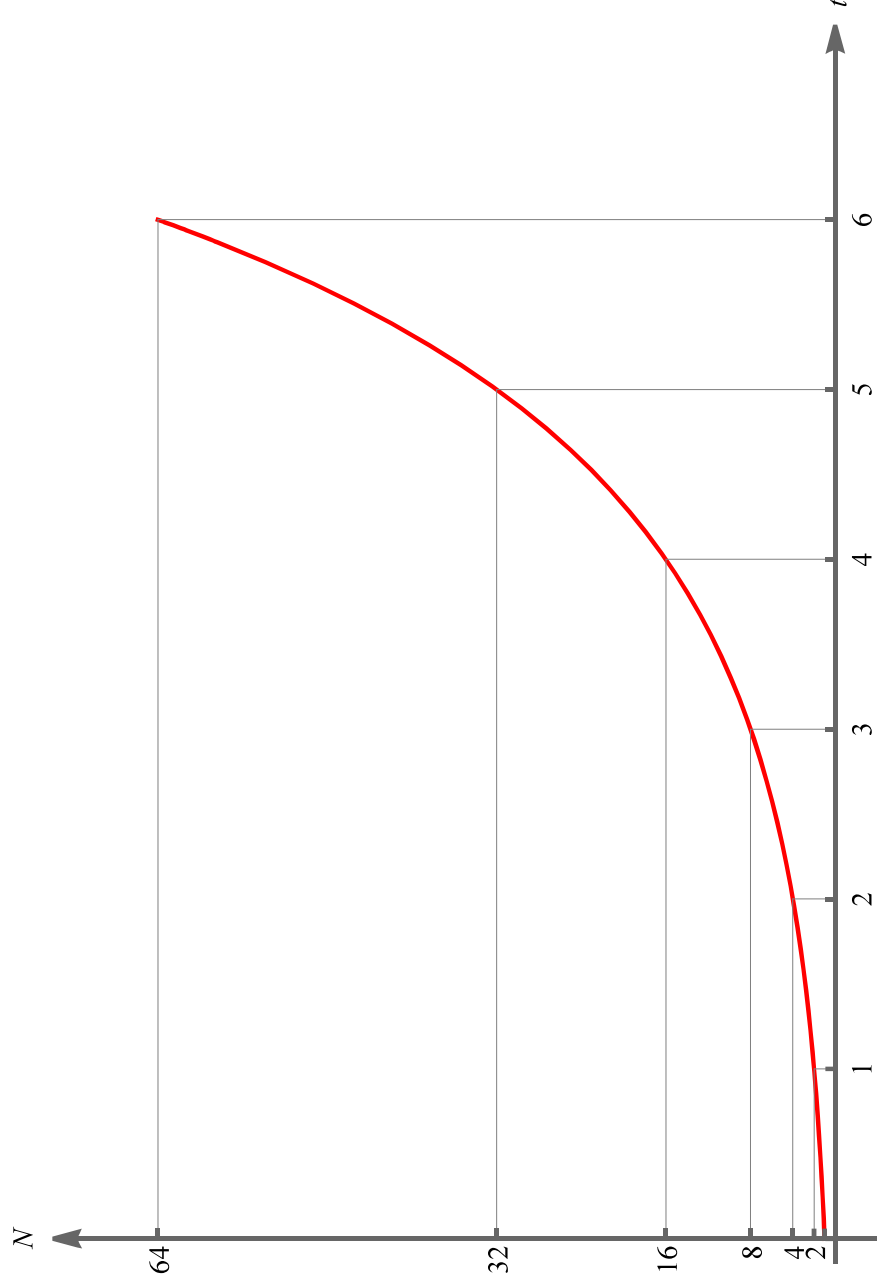
Za další rok bude pokryta polovina (to co předtím trvalo 22 let, nyní proběhne za jediný rok) a za další rok bude pokrytý celý rybník.

☛ **Příklad 5.** Množení bakterií, infikovaných jedinců apod.

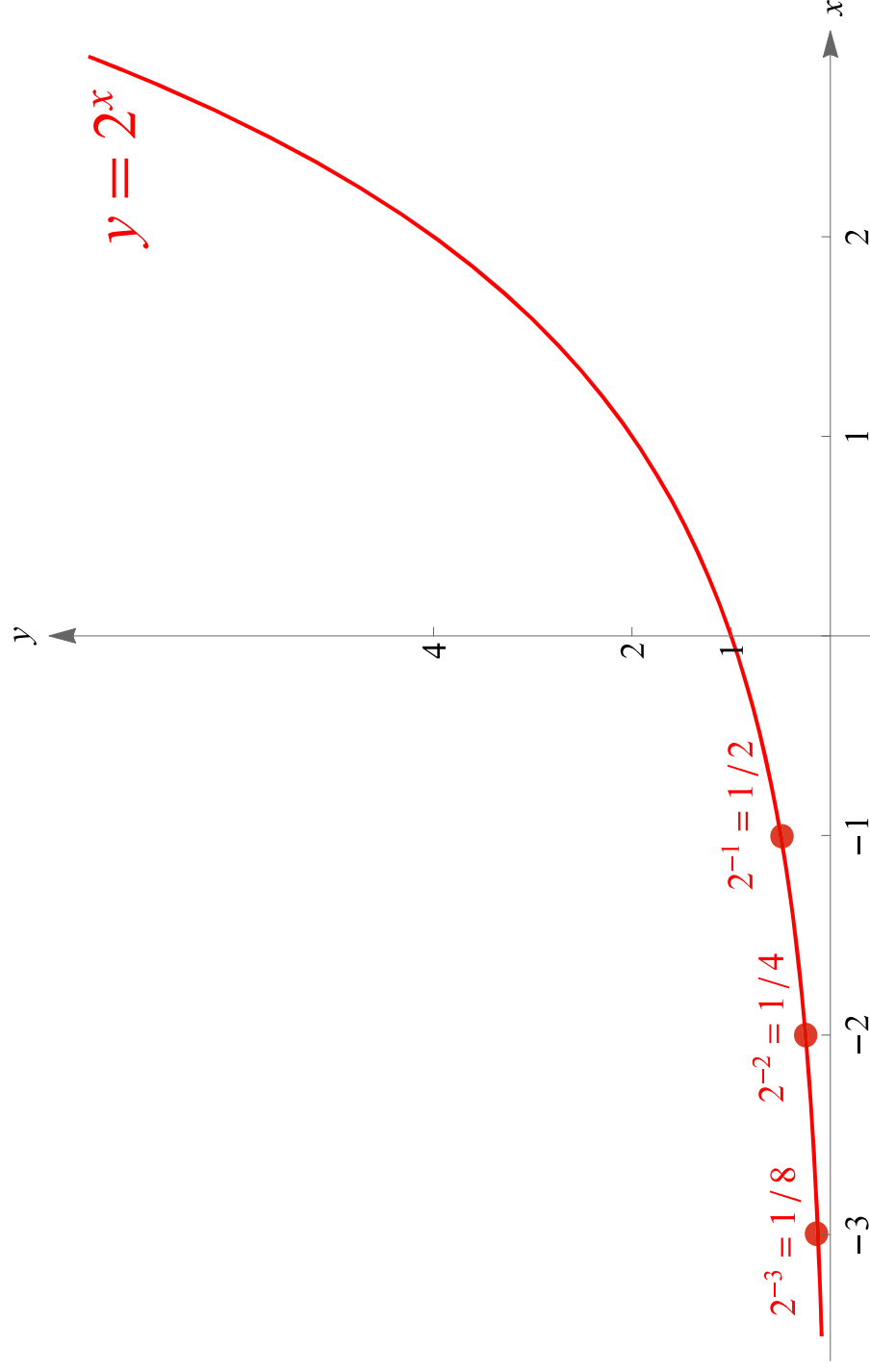
Přestavte si například, že v zemi zvané Kocourkov se šíří infekce Mu-ribundus. Počet nakažených po t týdnech od onemocnění prvního Kocourkovana je dán vztahem $N(t) = 2^t$.



Můžeme si všimnout, že na začátku trvá 10 týdnů, než se z 1 nakaženého dostaneme na 1000. Za stejnou dobu se ale z 1000 dostaneme na 1 000 000 – a pak už je to jako s těmi lekníny. Jakmile se dostaneme např. na 1,25 milionu, tj. osminu obyvatel Kocourkova, stačí týden a bude nakažená čtvrtina, za další polovina a za další týden už budou nakažení všichni. A vládce Kocourkova se diví, jak je to možné, když to tak dlouho probíhalo v klidu a ještě před 3 týdny bylo 7/8 obyvatelstva zdravých.

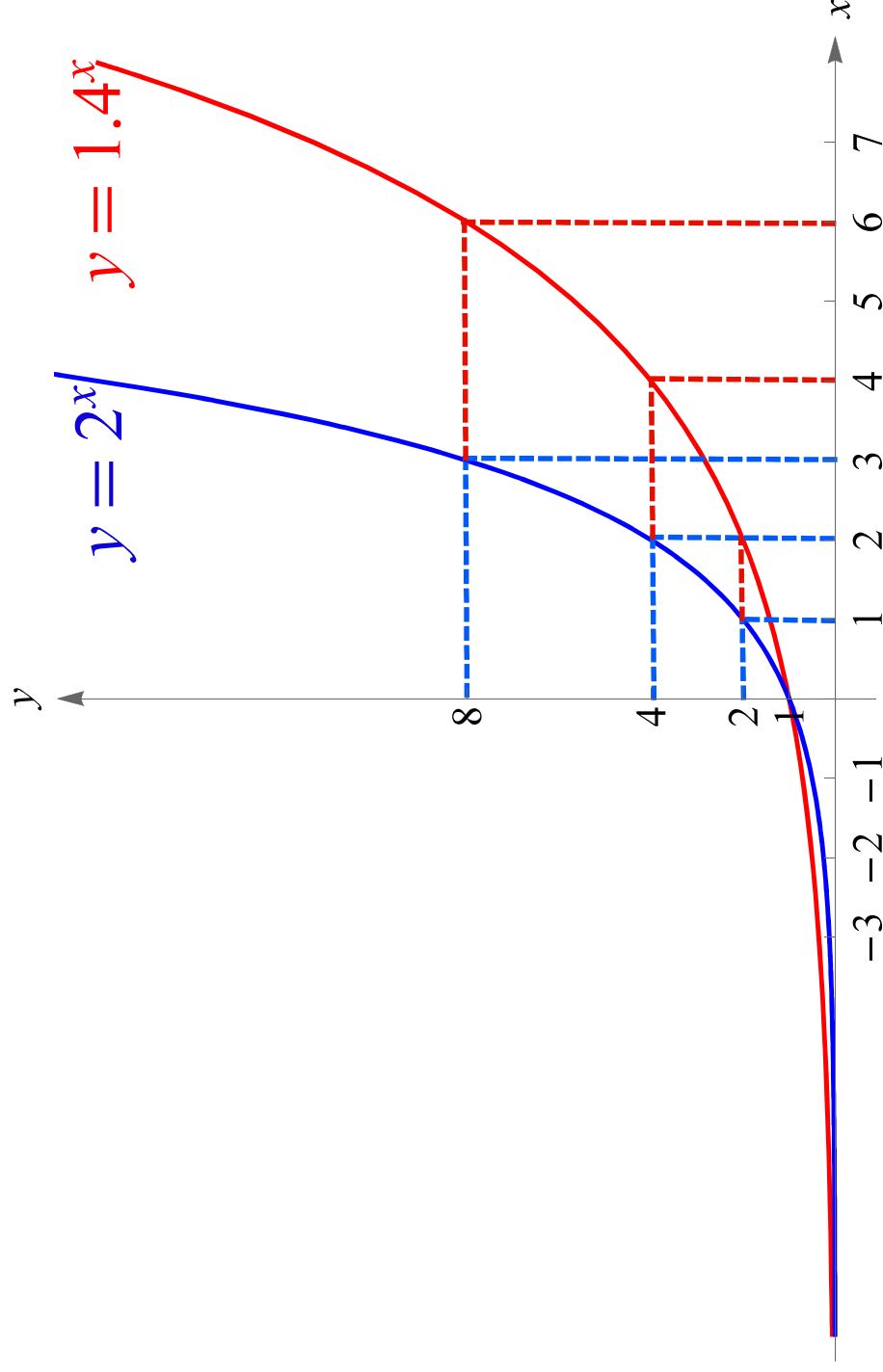


👉 **Příklad 6.** Exponenciální funkce v $\mathbb{R}$:



Funkce je rostoucí v $\mathbb{R}$.

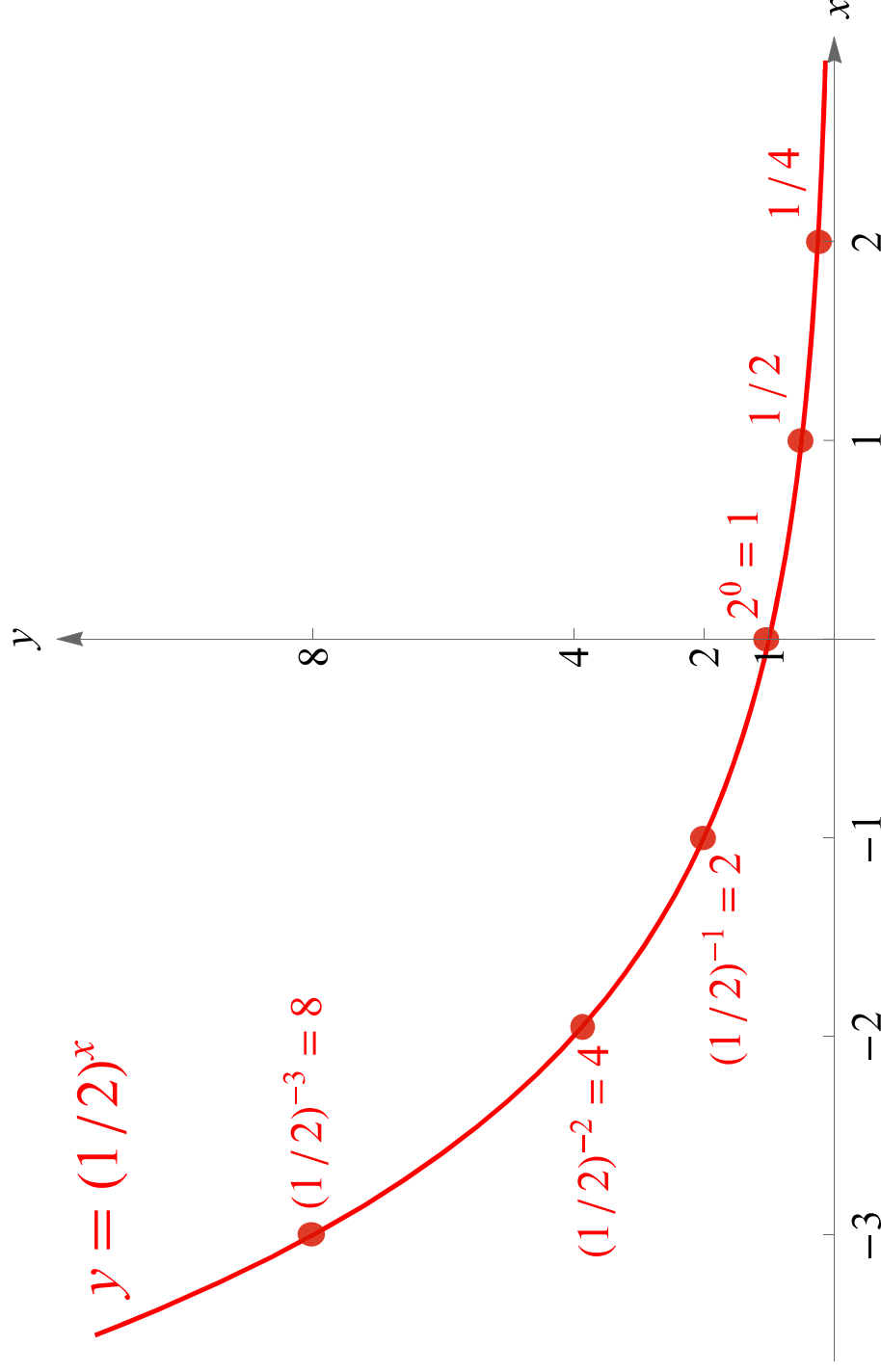
☛ **Příklad 7.** Exponenciální funkce v $\mathbb{R}$ pro $a > 1$:



V grafu je pro srovnání znázorněn graf funkce $y = (\sqrt{2})^x = 2^{x/2}$. Tvar je podobný, jen to, co např. u Muribundu trvalo 1 týden, trvá nyní 2 týdny (včetně posledního kroku z poloviny na celek).

Exponenciální funkce $y = a^x$ je rostoucí pro každé $a > 1$.

☛ **Příklad 8.** Exponenciální funkce v $\mathbb{R}$ pro $0 < a < 1$:



Funkce je klesající v $\mathbb{R}$.

Pro záporný základ a by byl definiční obor, a tedy i graf, hodně „děravý“ (např. $(-2)^x$ nemá smysl pro $1/2$ (druhá odmocnina), $1/4$, $7/8$ a nekonečně mnoho dalších hodnot).

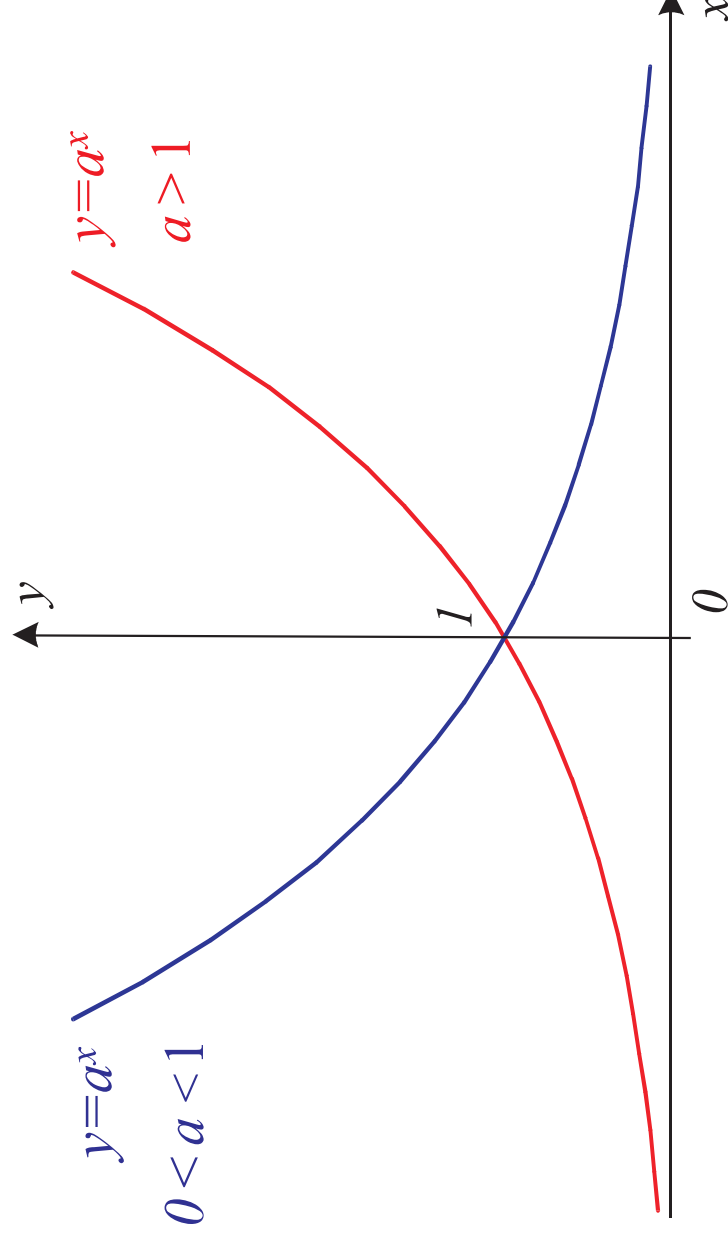
Exponenciální funkce se proto zavádí jen pro kladný základ.

Exponenciální funkce o základu a

Exponenciální funkce o základu a je funkce

$$f : y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad D(f) = \mathbb{R}.$$

Je-li základ $a > 1$, je funkce a^x rostoucí v $\mathbb{R}$, je-li $0 < a < 1$, je klesající v $\mathbb{R}$; v obou případech je prostá v celém definičním oboru.



Logaritmická funkce o základu a

Logaritmická funkce o základu a je zavedena jako funkce **inverzní k exponenciální funkci o též základu a** . Symbolicky se zapisuje takto:

$$f : y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad D(f) = (0, +\infty).$$

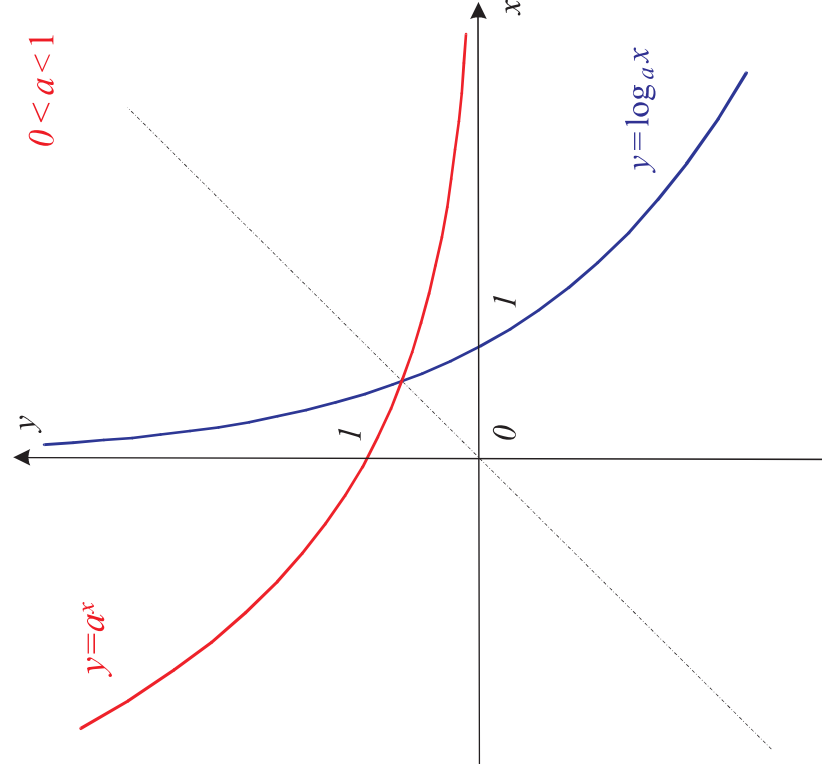
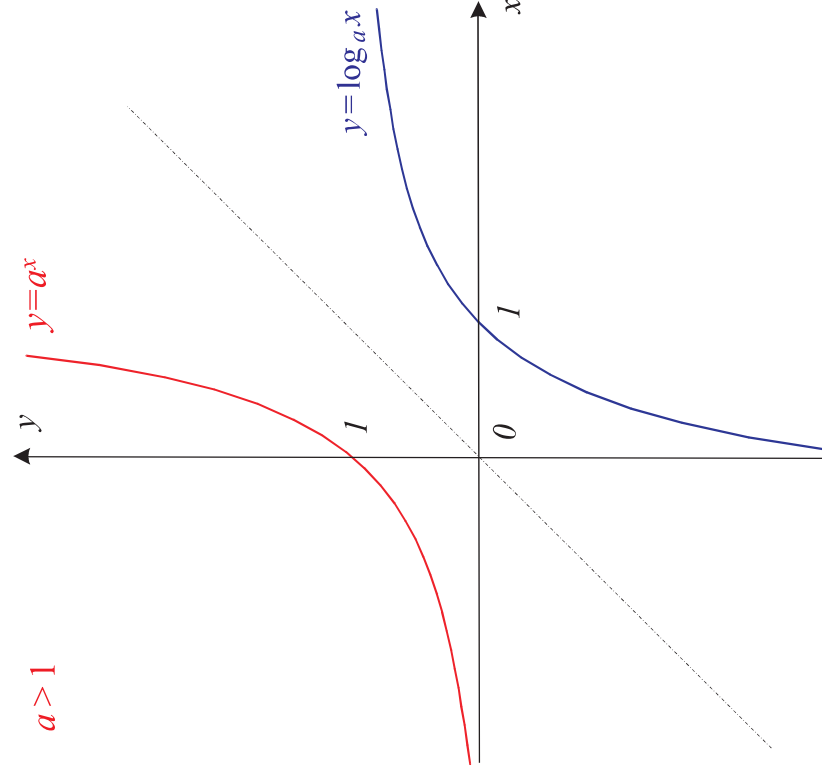
Pro každé $x \in (0, +\infty)$, $y \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ platí:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Logaritmus tedy udává, co je třeba dosadit do exponentu v a^y , aby vyšla daná hodnota x . Speciálně:

$$\log_a a^n = n, \quad \log_a 1 = \log_a a^0 = 0, \quad \log_a a = \log_a a^1 = 1$$

Je-li základ $a > 1$, je funkce $\log_a x$ rostoucí v $\mathbb{R}$, je-li $0 < a < 1$, je klesající v $\mathbb{R}$; v obou případech je prostá v celém definičním oboru.



Přirozený logaritmus: $\ln x = \log_e x$

Dekadický logaritmus: $\log x = \log_{10} x$

Pro $a > 0, a \neq 1, x, x_1, x_2 > 0$ a $r \in \mathbb{R}$ platí:

$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a(x_1/x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

K tomu si stačí uvědomit, že logaritmus udává hodnotu exponentu – a jak víme, při umocňování se exponenty násobí, při násobení se sčítají a při dělení se odečítají.

Označíme-li $y = \log_a x$, pak můžeme psát:

$$\log_a(x^r) = \log_a((a^y)^r) = \log_a(a^{ry}) = ry = r \log_a x$$

Pro $y_1 = \log_a x_1, y_2 = \log_a x_2$ platí:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(a^{y_1} \cdot a^{y_2}) = \log_a(a^{y_1+y_2}) = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a(x_1/x_2) = \log_a(a^{y_1}/a^{y_2}) = \log_a(a^{y_1-y_2}) = y_1 - y_2 = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

Různé základy:

Pro $a, b > 0, a \neq 1$:

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

K tomu si stačí uvědomit, že pro $y = \log_a b$ platí:

$$a^y = b \quad | \ln$$

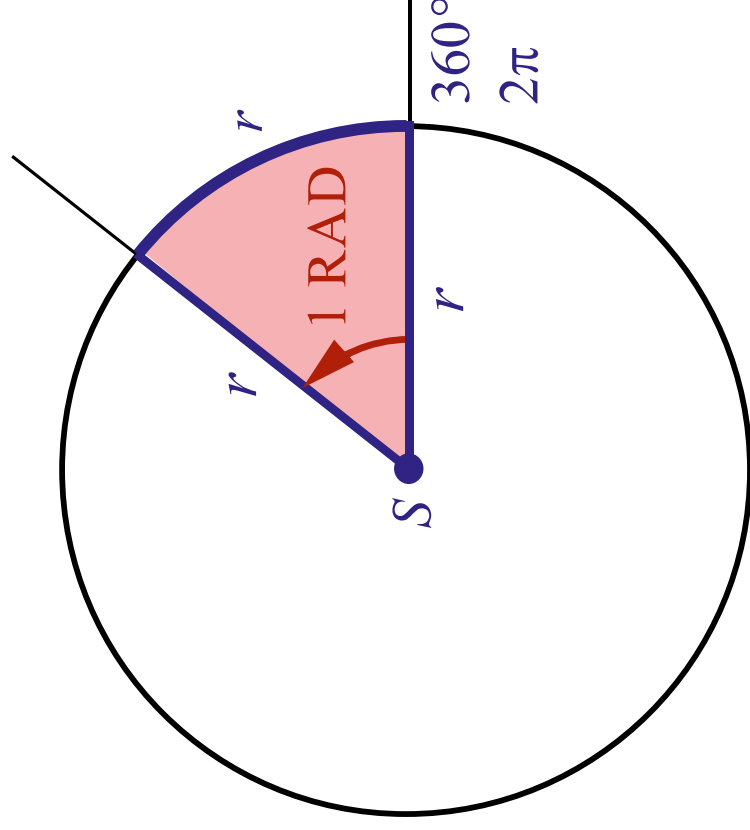
$$\ln a^y = \ln b$$

$$y \ln a = \ln b$$

$$y = \frac{\ln b}{\ln a}$$

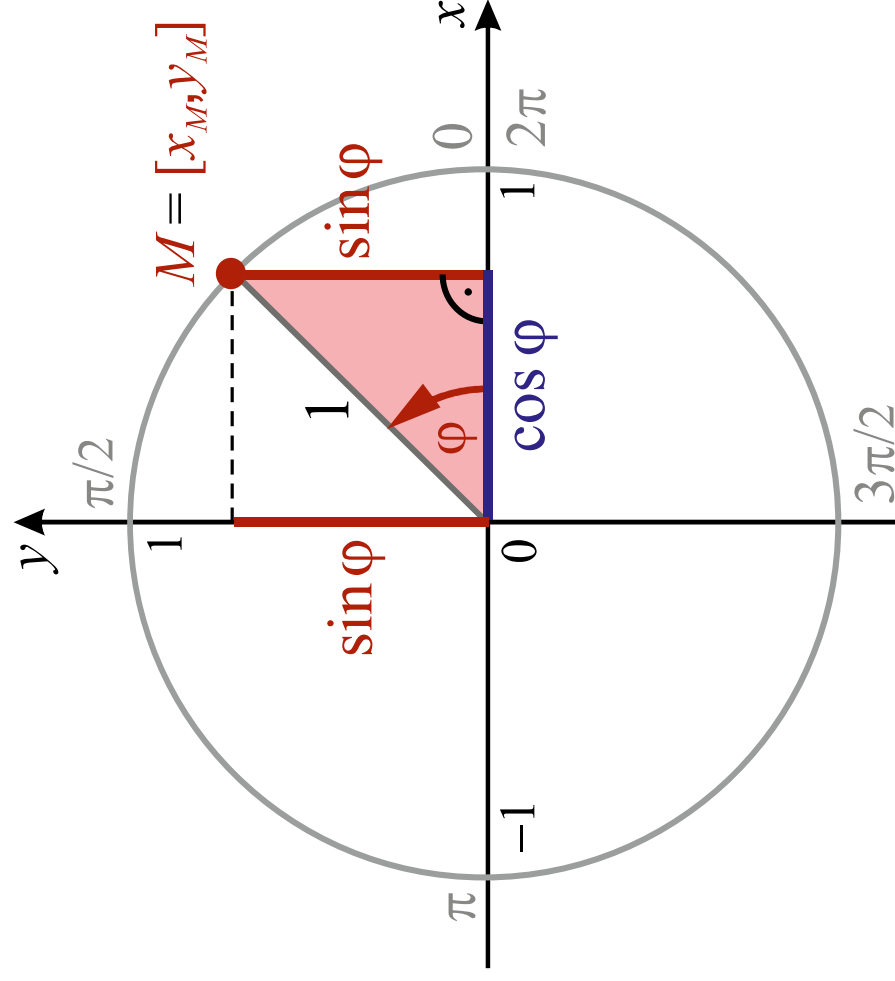
Goniometrické funkce

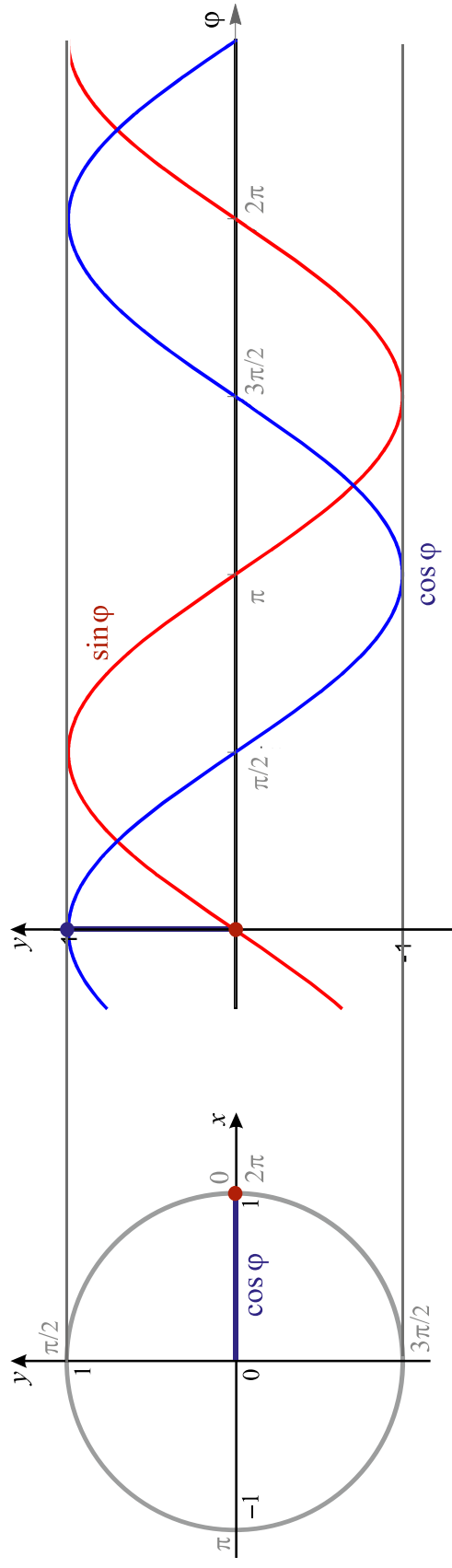
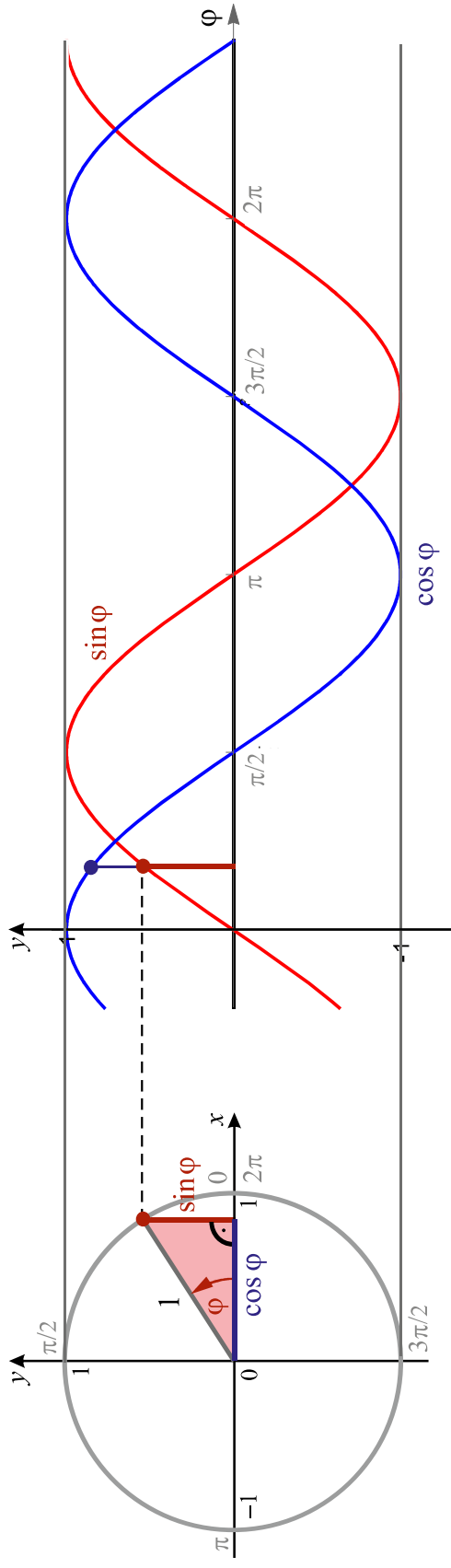
Velikosti úhlů budeme obvykle vyjadřovat v tzv. **obloukovém míře** neboli v **radiánech**. Jak víte ze střední školy, jeden radián je středový úhel, který přísluší oblouku o stejné délce, jako je poloměr kružnice:



V tzv. **úhlovém míře** je plný úhel 360° , v obloukovém míře je to 2π radiánů (značka jednotek se v tomto případě obvykle nepíše; není-li tedy u velikosti úhlu symbol stupně, automaticky se rozumí, že se jedná o radiány).

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic Oxy . Ke každému reálnému číslu φ lze přiřadit právě jeden **orientovaný úhel v základní poloze** o velikosti φ (v obloukové míře), jehož počáteční rameno je kladná poloosa x . Sestrojíme jednotkovou kružnici (tj. kružnici o poloměru 1) se středem v počátku O , její průsečík s koncovým ramenem orientovaného úhlu φ v základní poloze označíme M .





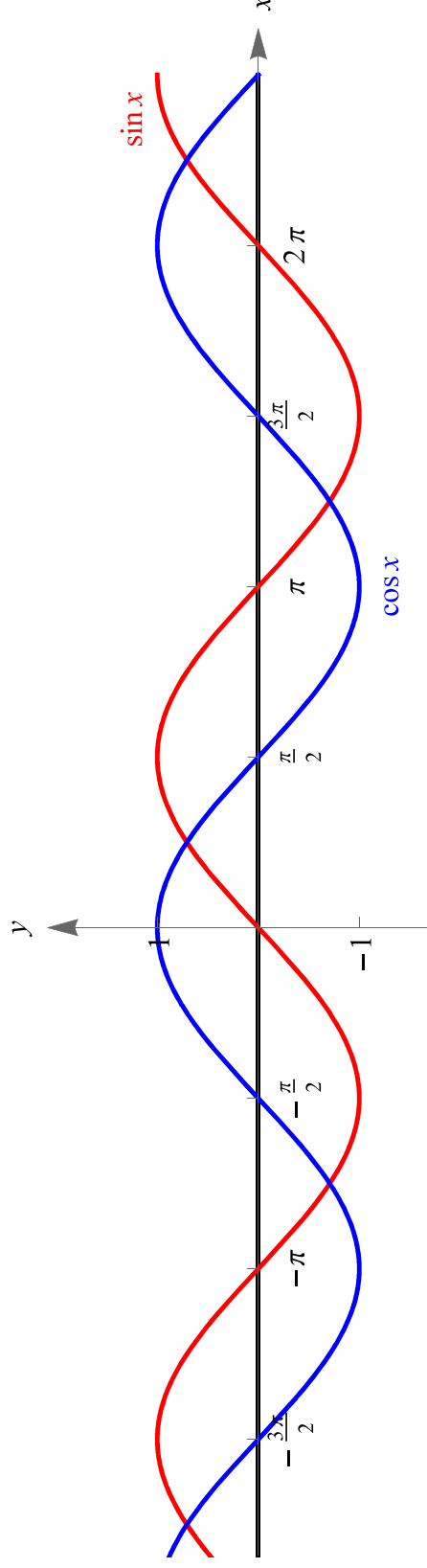
Definujeme:

Druhou souřadnici bodu M jednotkové kružnice na koncovém rameni orientovaného úhlu φ v základní poloze nazýváme **sinus úhlu** φ a jeho první souřadnici nazýváme **kosinus úhlu** φ ; značíme je $\sin \varphi, \cos \varphi$.

$$\sin \varphi = y_M, \quad \cos \varphi = x_M \quad \text{pro každé } \varphi \in \mathbb{R}.$$

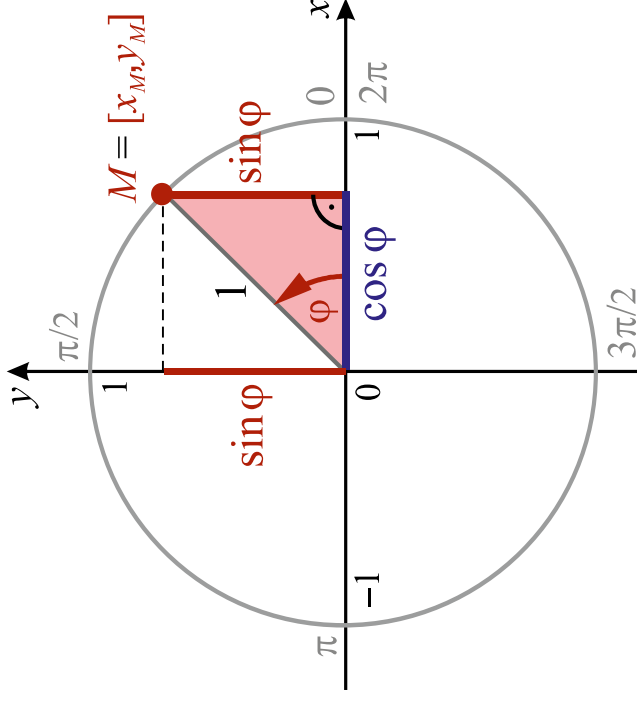
Těmito vztahy je každému reálnému číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřazeno právě jedno reálné číslo $\sin x$ a právě jedno reálné číslo $\cos x$, tj. tyto vztahy udávají funkční předpisy **funkce sinus** a **funkce kosinus**:

$$f : y = \sin x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}, \quad f : y = \cos x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$



Funkce sinus je lichá, funkce kosinus sudá, obě funkce jsou periodické s periodou 2π . Obě jsou rovněž omezené:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$



$$\begin{aligned} \sin x &= 0 && \text{právě když je } x = k\pi, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z} \\ \cos x &= 0 && \text{právě když je } x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Pro libovolné reálné číslo x platí (z Pythagorovy věty):

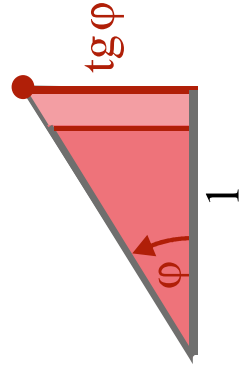
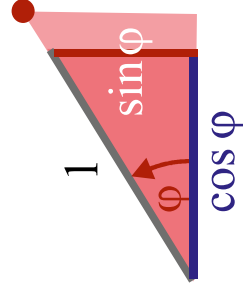
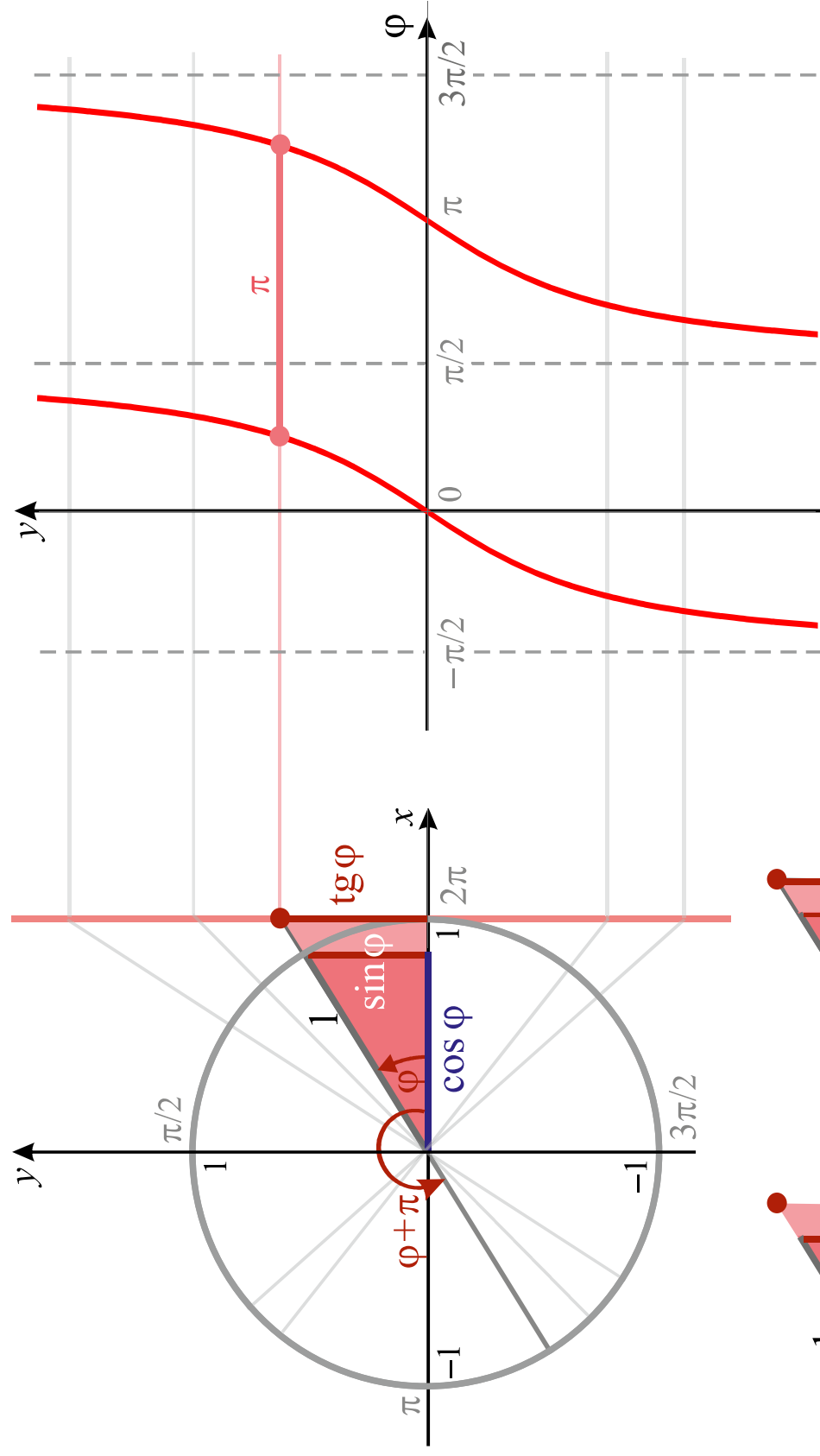
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$(3.2)$$

Funkce **tangens** je zavedena vztahem:

$$f : y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$$

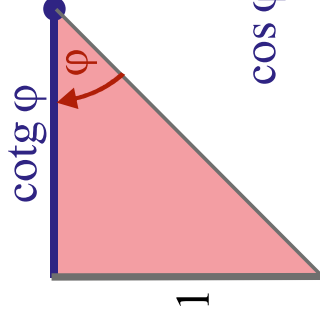
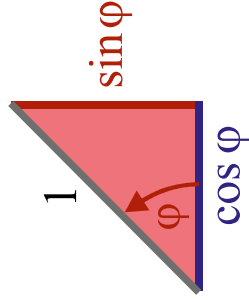
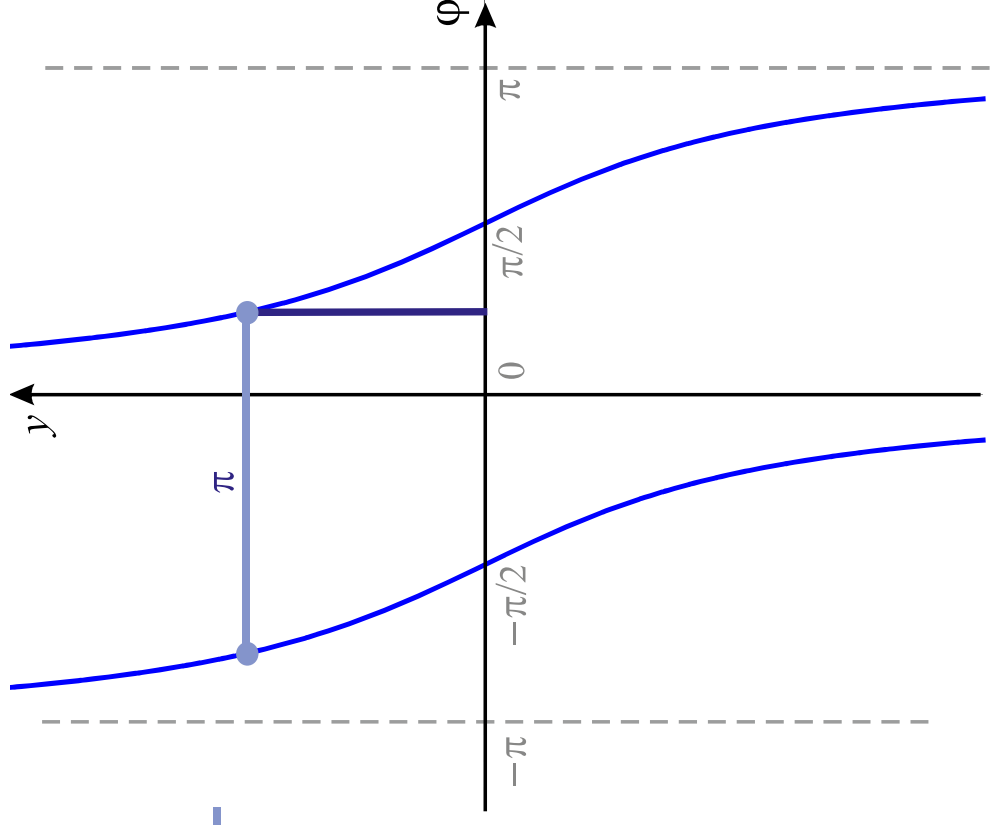
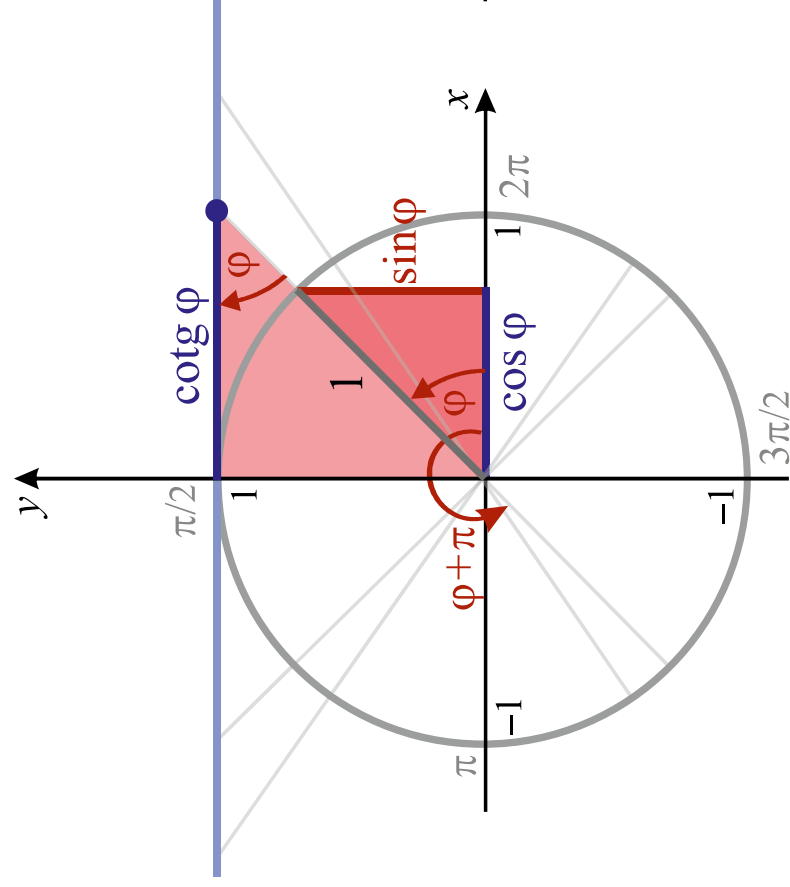


$$\sin \varphi : \cos \varphi = \operatorname{tg} \varphi : 1$$

Funkce **cotangens** je zavedena vztahem:

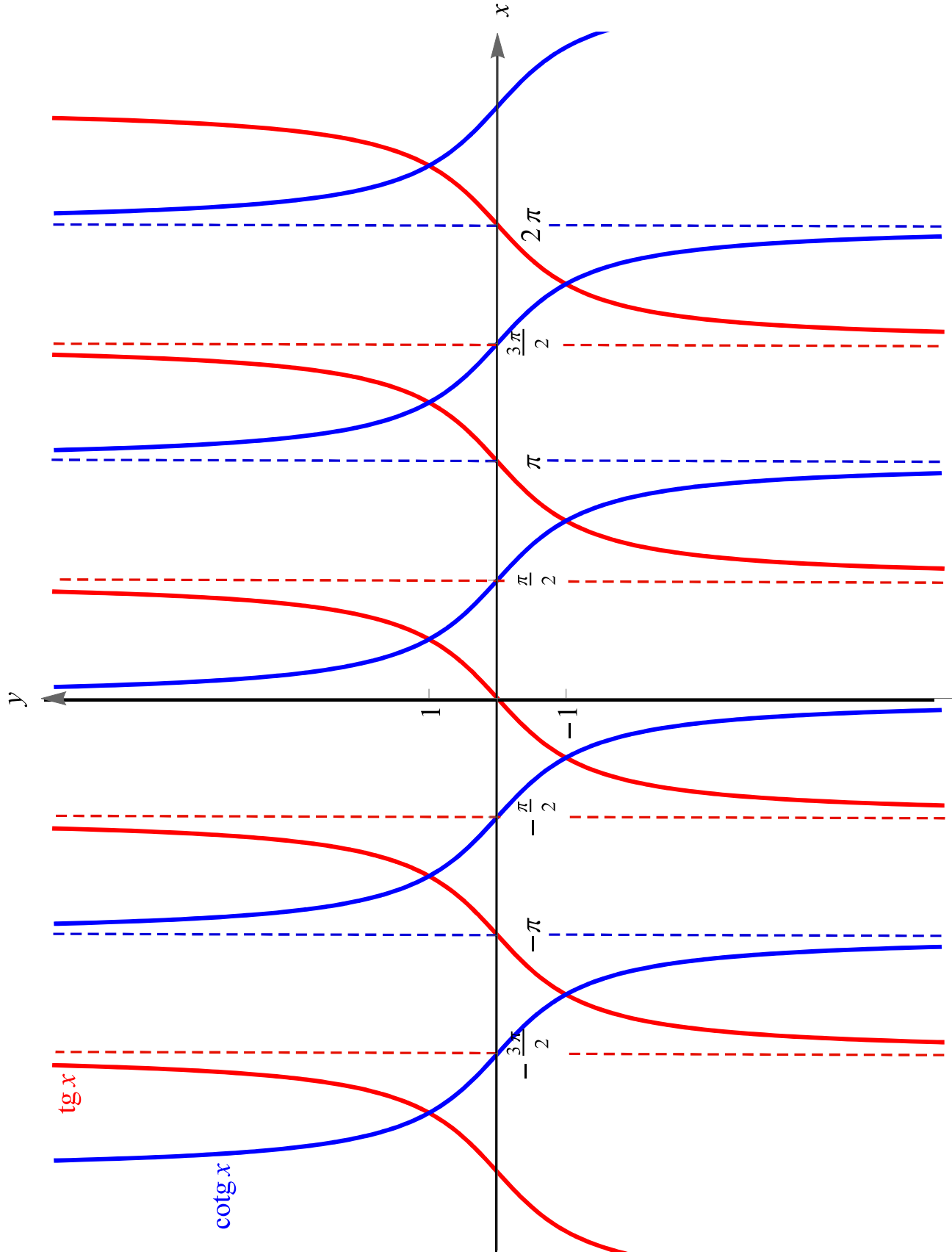
$$f : y = \cotg x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$$



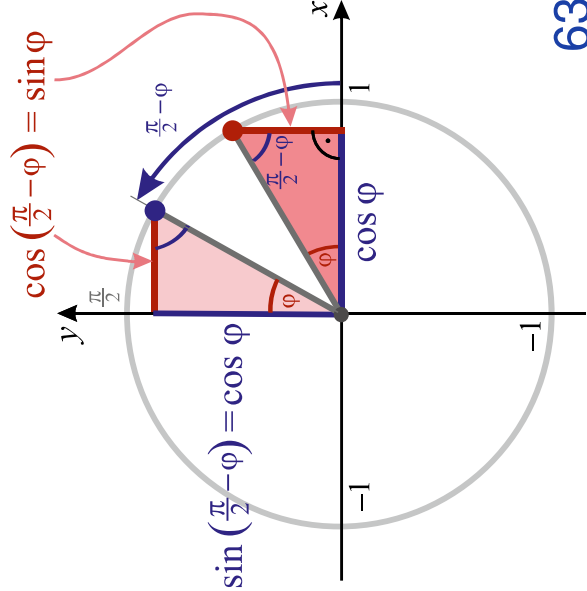
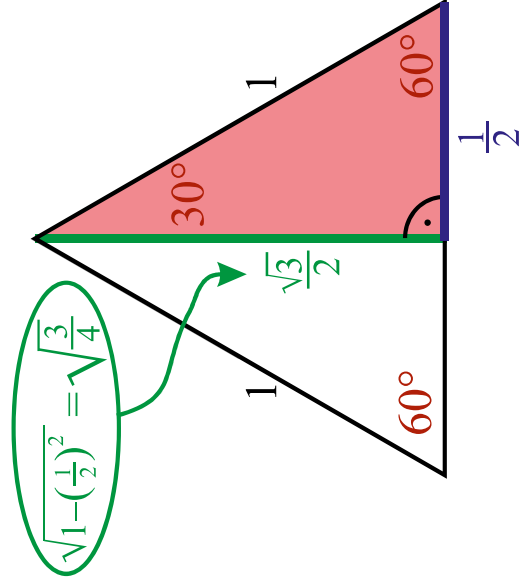
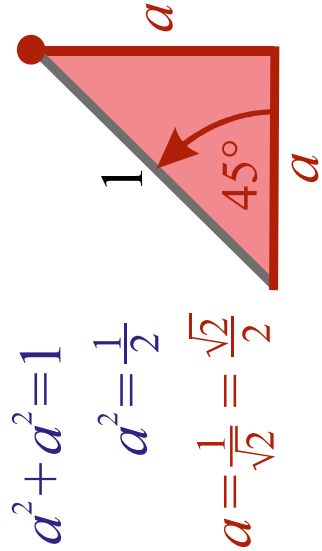
$$\cos \varphi : \sin \varphi = \cotg \varphi : 1$$

Funkce tangens a cotangens jsou liché a periodické s per. π .



Důležité hodnoty goniometrických funkcí:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.	0
$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0	není def.

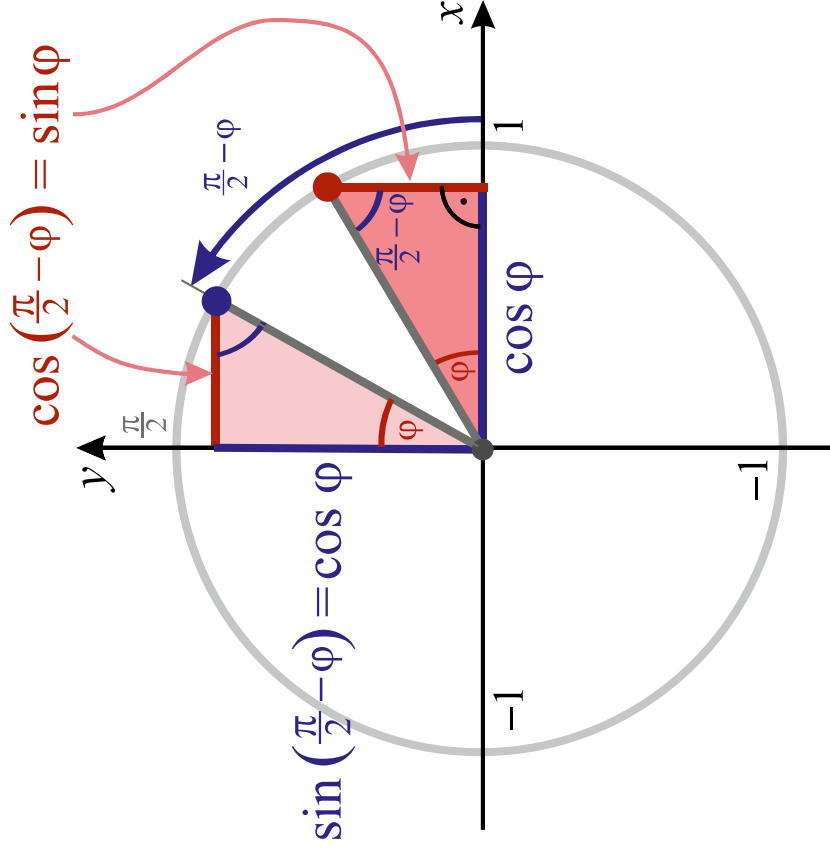


Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Jak jsme viděli již na předchozí stránce, platí:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$$



Pro tangens a cotangens
z toho plyne:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{ctg} \varphi$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{tg} \varphi$$

V calculu budeme potřebovat následující vztahy. Stačí, budete-li si pamatovat vzorečky ve žlutých rámečcích; pro zvědavé je doplněno i odvození. Zejména v druhém semestru uvidíme, že znalost těchto vztahů nám často výrazně usnadní práci.

V první kapitole jsme si připomněli mj. komplexní čísla a jejich vlastnosti. Viděli jsme, že komplexní číslo $z = a + bi$ lze také vyjádřit v goniometrickém nebo exponenciálním tvaru:

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi},$$

$$\text{tj. } e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Odtud plyne:

$$e^{2i\varphi} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$$

a také

$$e^{2i\varphi} = (e^{i\varphi})^2 = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cos \varphi,$$

proto

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

Podobně uvažujme

$$e^{i\varphi_1} = \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1, \quad e^{i\varphi_2} = \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2.$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} &= e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \\ &= (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \end{aligned}$$

Tedy

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

Dosadíme-li $-\varphi_2$ místo φ_2 a uvědomíme si, že $\sin(-\varphi_2) = -\sin \varphi_2$,
 $\cos(-\varphi_2) = \cos \varphi_2$, pak dostaneme

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

Všimněte si, že speciálně pro $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ dostáváme:

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Protože $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, plyne z prvního vztahu

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - (1 - \cos^2 \varphi) = 2 \cos^2 \varphi - 1,$$

a tedy

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}.$$

Podobně

$$\cos 2\varphi = (1 - \sin^2 \varphi) - \sin^2 \varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi,$$

a tedy

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}.$$

Poznámka. Tyto vzorce budou zvlášť důležité v Calculu 2, kde budeme hledat integrály. Často budeme potřebovat nahradit druhou mocninu sinu nebo cosinu první mocninou (dvojnásobný argument nebude dělat problémy). Podobně bude často užitečné nahradit součin dvou goniometrických funkcí součtem nebo rozdílem jednotlivých goniometrických funkcí.

Sečtením rovnic

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

získáme

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

a tedy

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 = \frac{1}{2} (\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Sečtením a odečtením rovnic

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

získáme

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(\varphi_1 + \varphi_2) = 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

a tedy

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = \frac{1}{2} (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

$$\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \frac{1}{2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou zavedeny jako inverzní funkce k funkcím goniometrickým. Protože funkce inverzní existuje jen pro prostou funkci, je vždy nejprve třeba omezit definiční obor na interval, na němž je daná goniometrická funkce prostá.

Funkce arkussinus,

$$f : y = \arcsin x, \quad \mathbf{D}(f) = \langle -1, 1 \rangle,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\sin x$ na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$.
Je tedy určena vztahem

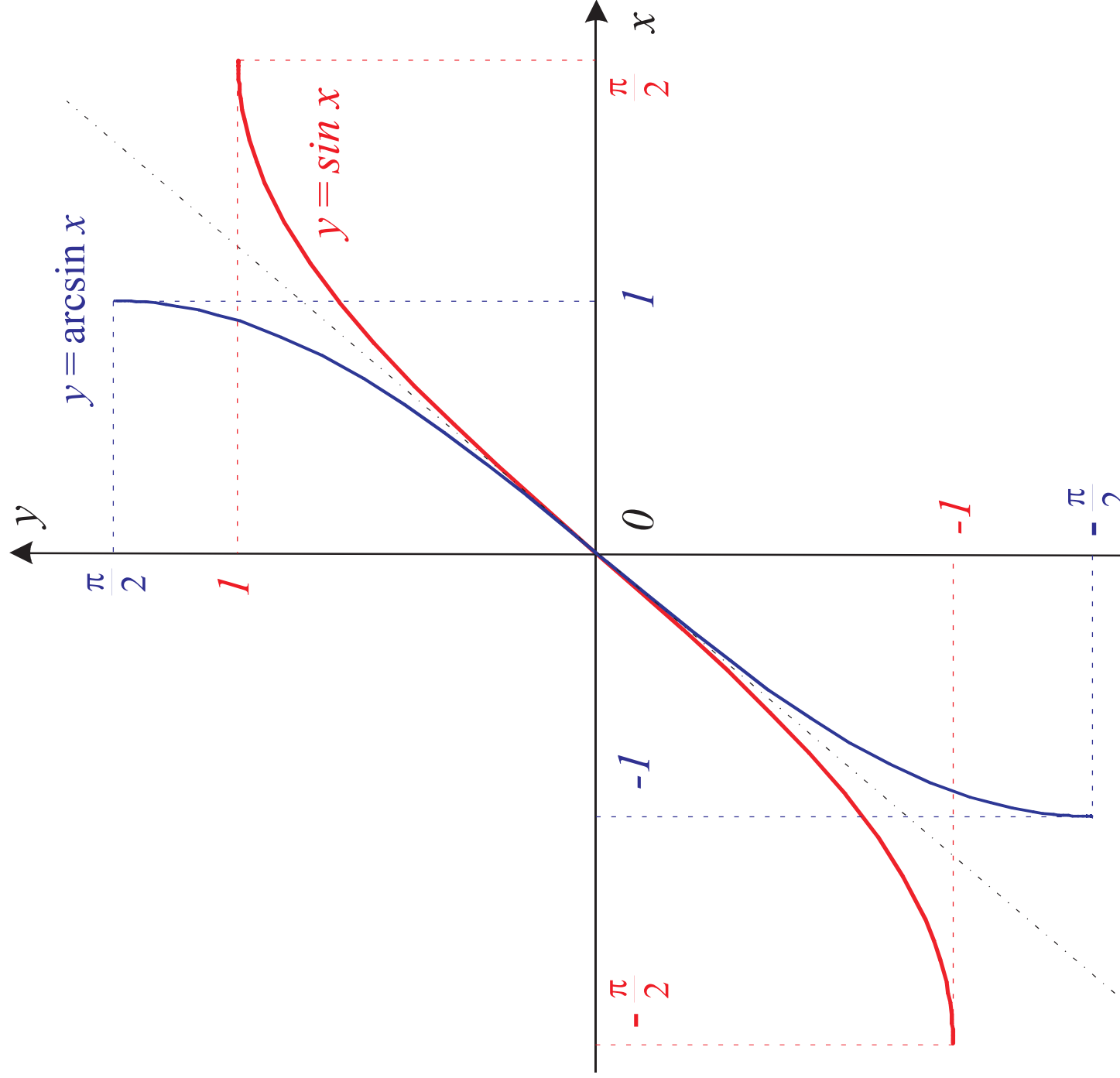
$$y = \arcsin x \iff x = \sin y, \quad y \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle.$$

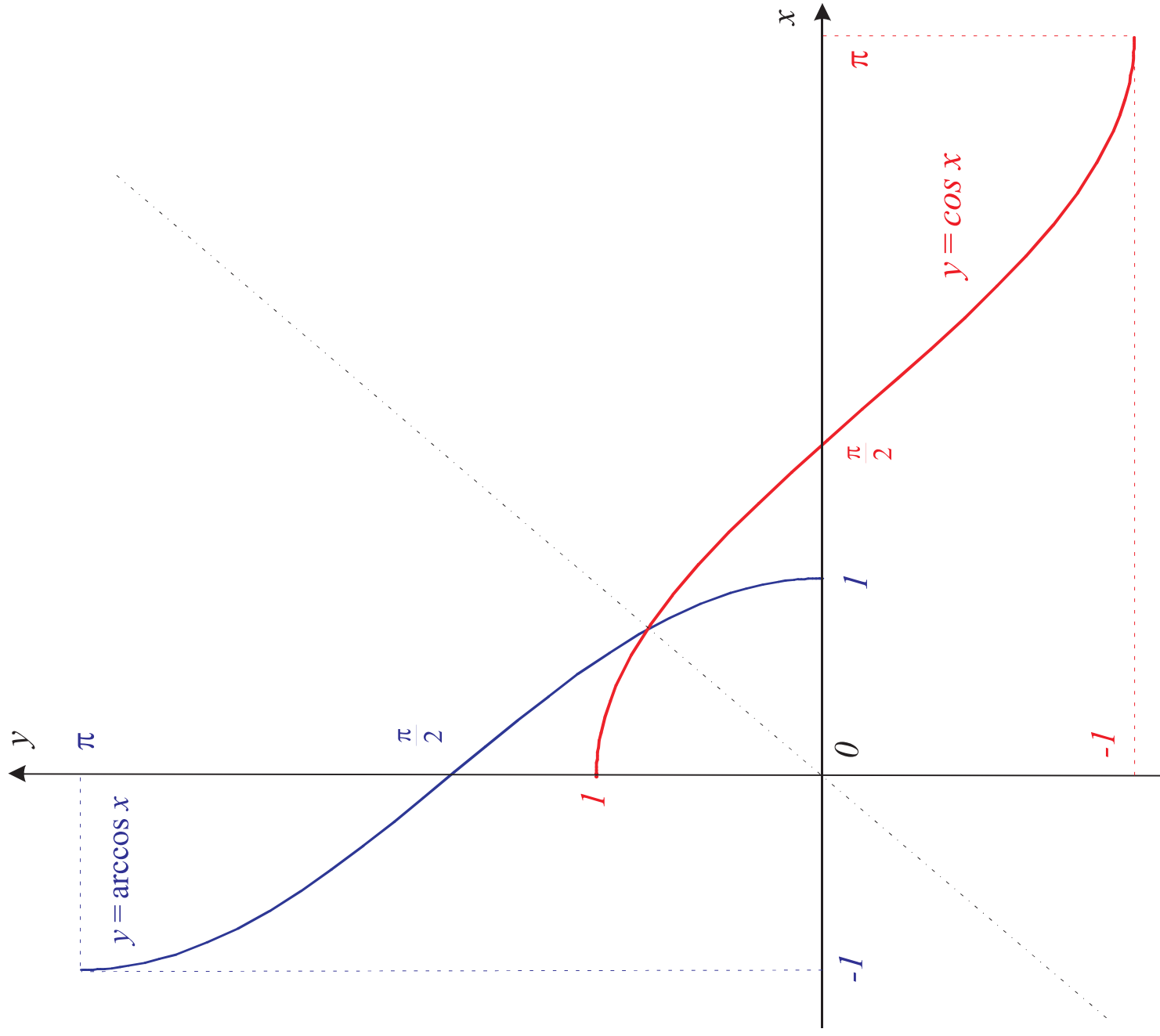
Funkce arkuscosinus,

$$f : y = \arccos x, \quad \mathbf{D}(f) = \langle -1, 1 \rangle,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\cos x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Je tedy určena vztahem: $y = \arccos x \iff x = \cos y, \quad y \in \langle 0, \pi \rangle$.





Funkce arkustangens,

$$f: y = \operatorname{arctg} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Je tedy určena vztahem

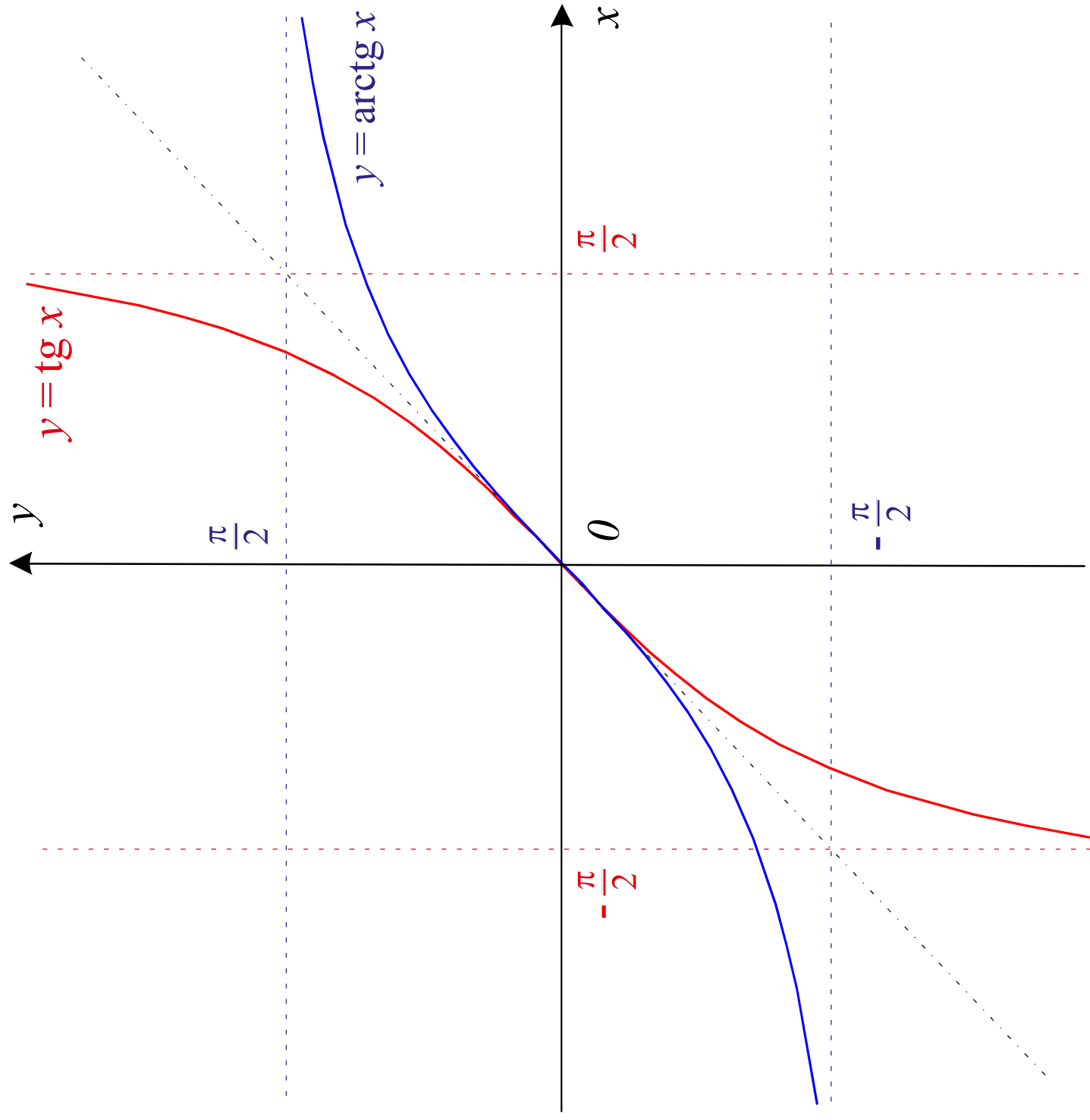
$$y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} y, \quad y \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle.$$

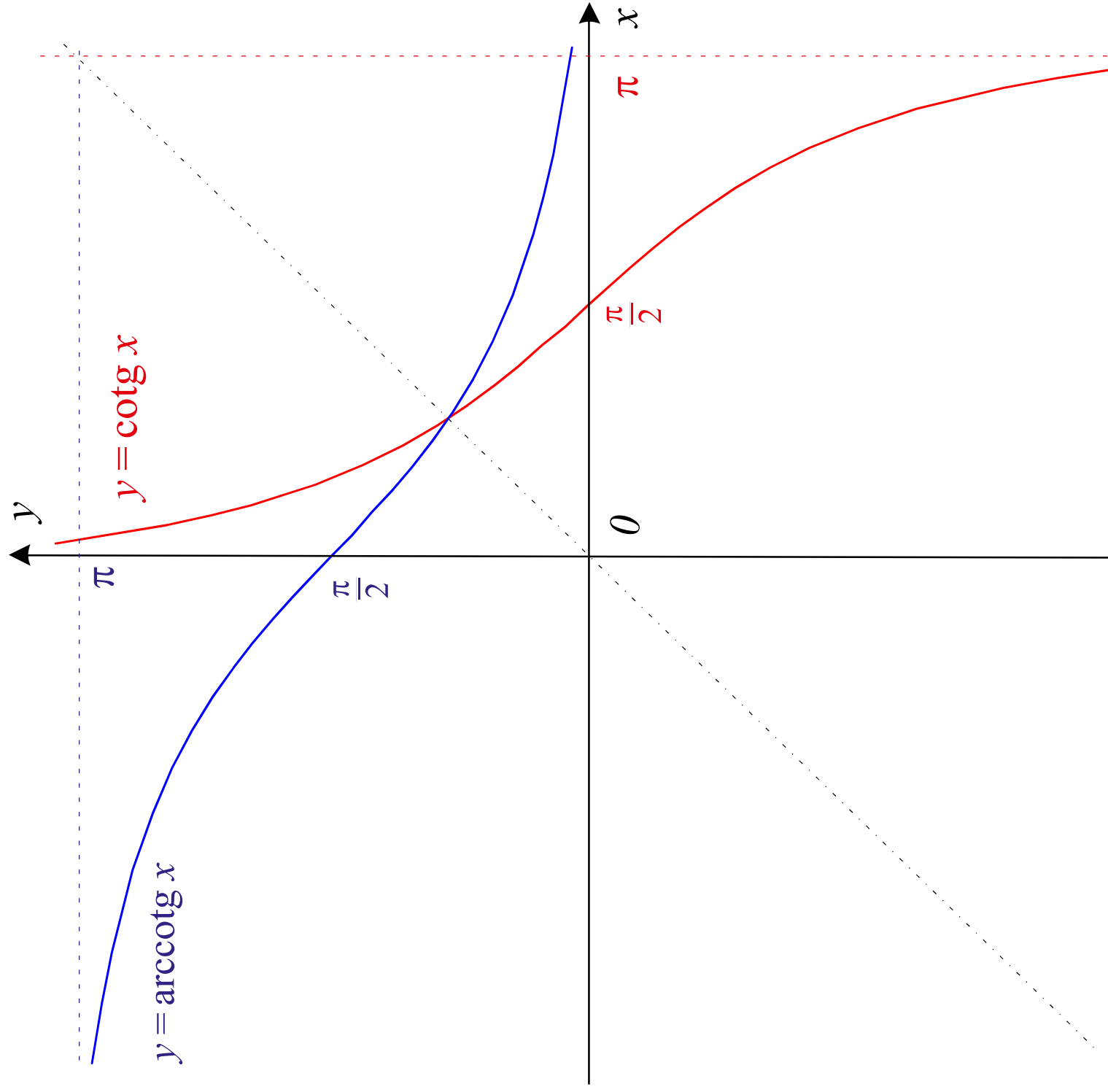
Funkce arkuskotangens,

$$f: y = \operatorname{arccotg} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Je tedy určena vztahem

$$y = \operatorname{arccotg} x \iff x = \operatorname{cotg} y, \quad y \in \langle 0, \pi \rangle.$$





Hyperbolické funkce

Funkce **sinus hyperbolický** a **kosinus hyperbolický**,

$$f : y = \sinh x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

$$f : y = \cosh x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

jsou definované vztahy

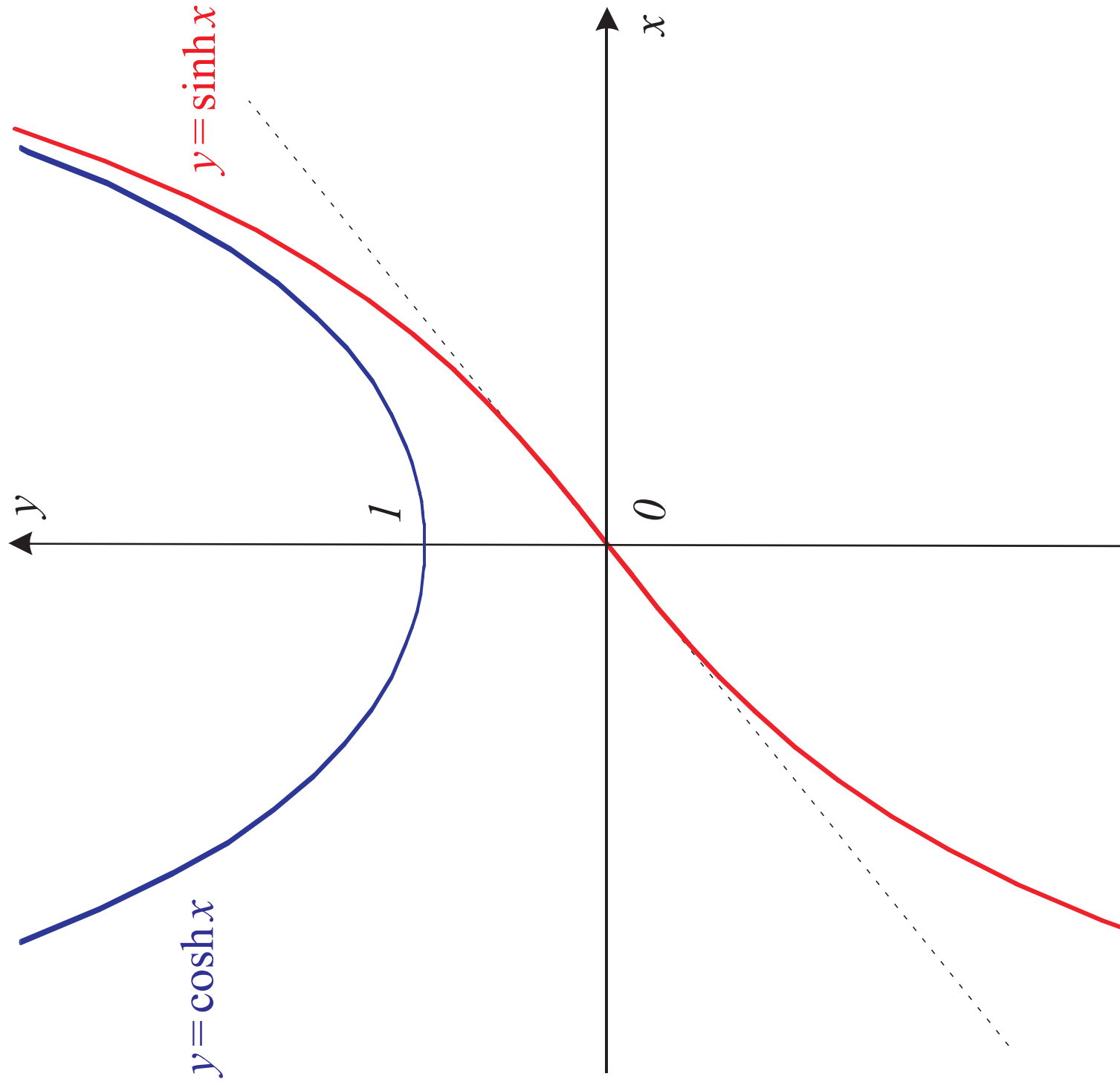
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Z definičních vztahů plyne, že pro $\sinh x$ a $\cosh x$ platí:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$



Funkce **tangens hyperbolický** a **kotangens hyperbolický**,

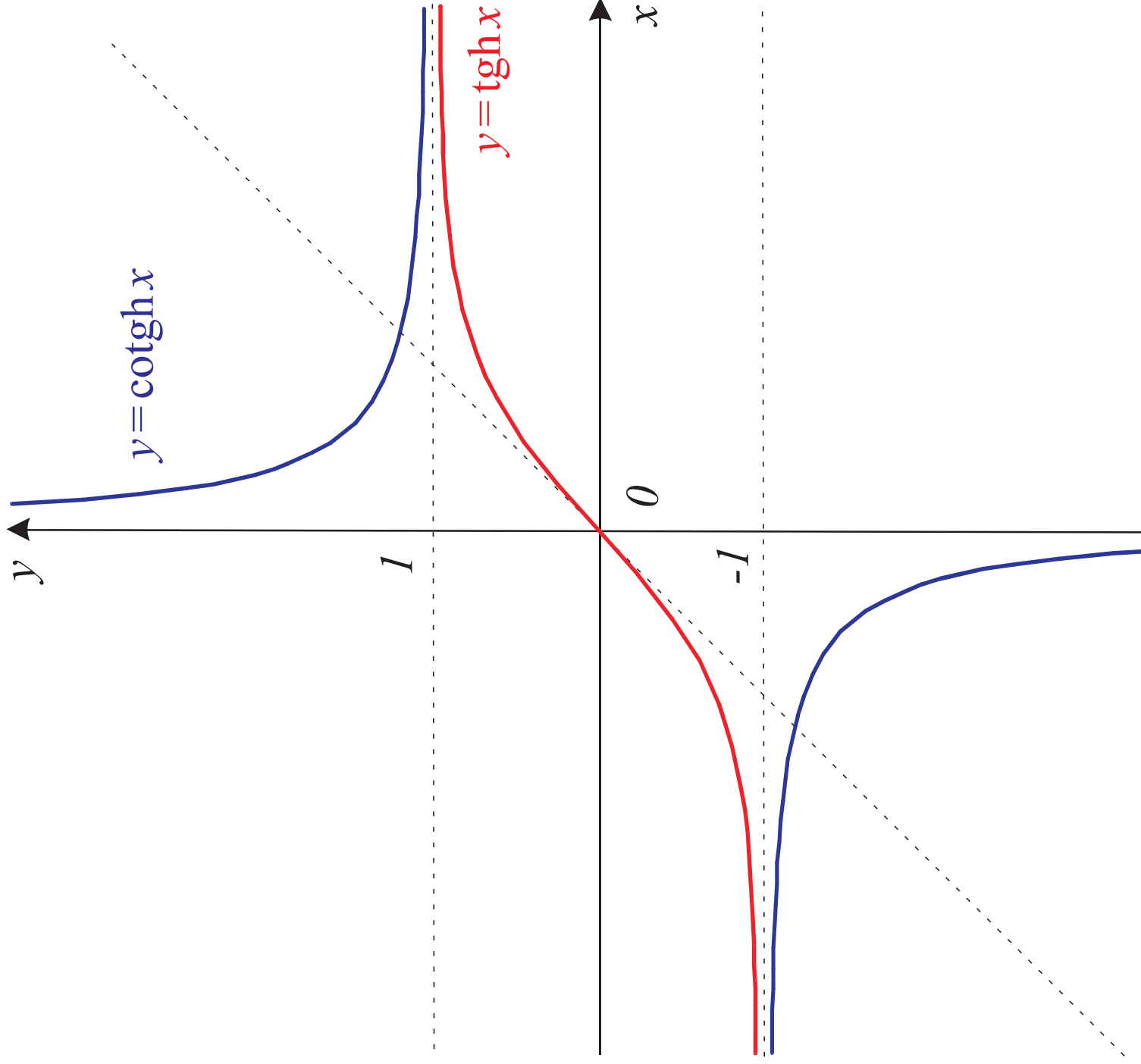
$$f : y = \operatorname{tgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

$$f : y = \operatorname{cotgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

jsou definované vztahy

$$\operatorname{tg} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



Hyperbolometrické funkce

Funkce **argument sinus hyperbolický**,

$$f : y = \operatorname{argsinh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci sinus hyperbolický:

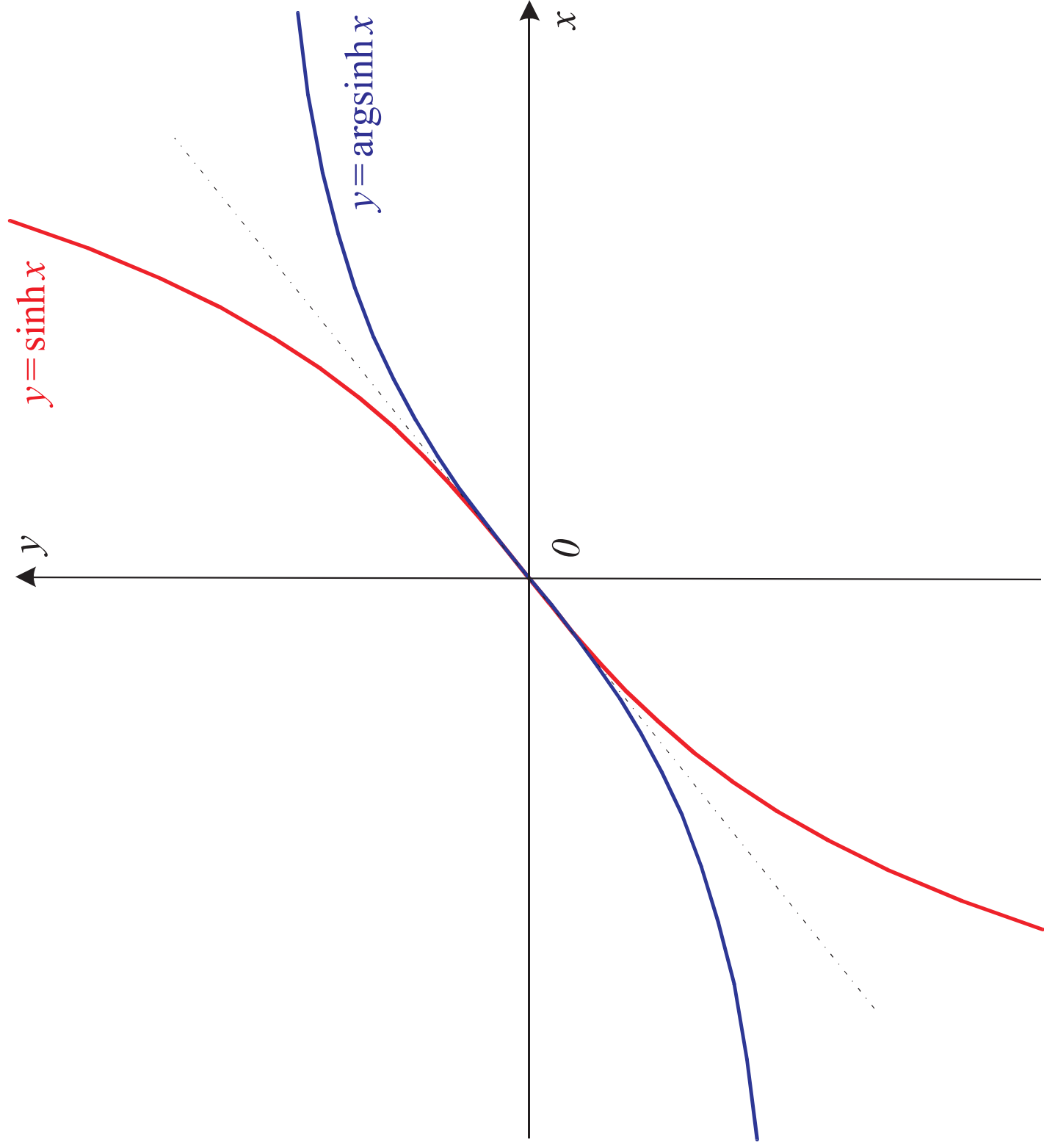
$$y = \operatorname{argsinh} x \iff x = \sinh y, \quad y \in \mathbb{R},$$

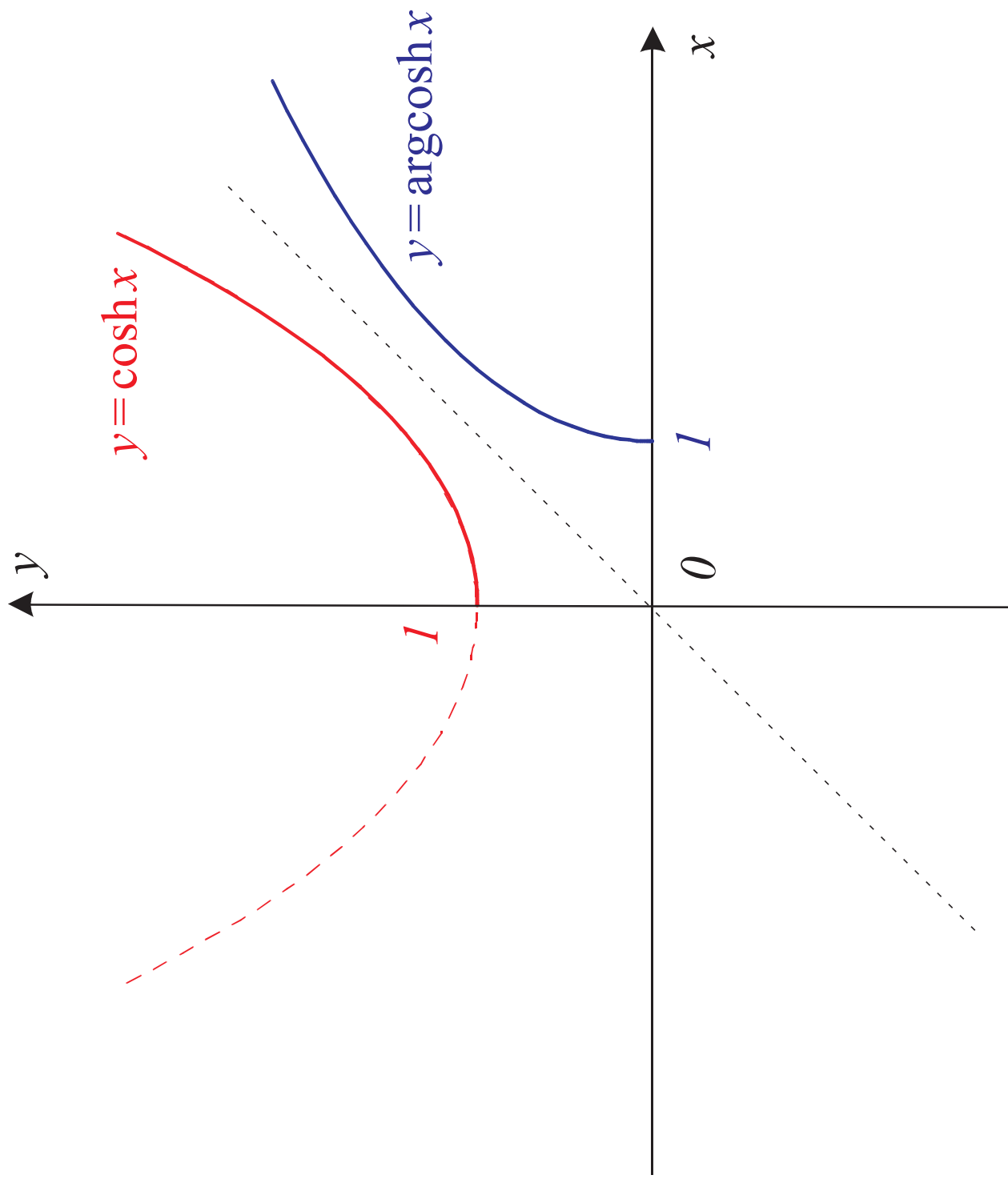
Funkce **argument kosinus hyperbolický**,

$$f : y = \operatorname{argcosh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \langle 1, \infty \rangle,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci kosinus hyperbolický:

$$y = \operatorname{argcosh} x \iff x = \cosh y, \quad y \in \langle 0, \infty \rangle$$





Funkce **argument tangens hyperbolický**,

$$f : y = \operatorname{tgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = (-1, 1),$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci tangens hyperbolický:

$$y = \operatorname{argtgh} x \iff x = \operatorname{tgh} y, \quad y \in \mathbb{R}$$

Funkce **argument kotangens hyperbolický**,

$$f : y = \operatorname{cotgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$$

je definovaná vztahem

$$y = \operatorname{argcotgh} x \iff x = \operatorname{cotgh} y, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

