

5 ZÁKLADNÍ TYPY ROVNIC

5.1 Rovnice a jejich řešení

Řadu praktických úloh lze matematicky zformulovat následujícím způsobem: Jsou dány dva výrazy $L(x)$, $P(x)$ s proměnnou x z daného číselného oboru $\mathbf{M}$; mají se určit hodnoty této proměnné, pro něž jsou si hodnoty obou výrazů rovny.

Zápis této úlohy ve tvaru

$$L(x) = P(x) \quad (5.1)$$

se nazývá **rovnice**. Výrazu $L(x)$ se říká **levá strana rovnice**, výrazu $P(x)$ **pravá strana rovnice**. Je-li pravá strana rovna nule, hovoříme o **anulovaném tvaru rovnice**. Proměnná x v rovnici se nazývá **neznámá**. Hodnoty neznámé, pro něž je rovnice splněna (tj. při jejichž dosazení přejde v rovnost čísel), se nazývají **kořeny (řešení) rovnice**. Číselný obor $\mathbf{M}$, ve kterém hledáme řešení rovnice, se nazývá **obor řešení rovnice**. Podmnožina množiny $\mathbf{M}$, v níž jsou definovány oba výrazy $L(x)$, $P(x)$ se nazývá **definiční obor rovnice** a značí se obvykle $\mathbf{D}$. Množinu všech kořenů (řešení) rovnice budeme značit $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{M}$).

☛ Příklad 15

Uvažujme rovnici

$$3x = 8$$

s neznámou $x \in \mathbf{R}$; pro tuto rovnici je *obor řešení* $\mathbf{M} = \mathbf{R}$, *neznámá* x , $L(x) = 3x$, $P(x) = 8$. Rovnice má právě jeden kořen, a to $x = \frac{8}{3}$; je tedy $\mathbf{K} = \{\frac{8}{3}\}$.

☛ Příklad 16

Uvažujme rovnici

$$3x + 5 = 4(2x - 3) - 5x + 17$$

s neznámou $x \in \mathbf{R}$; pro tuto rovnici je *obor řešení* $\mathbf{M} = \mathbf{R}$, *neznámá* x , $L(x) = 3x + 5$, $P(x) = 4(2x - 3) - 5x + 17 = 3x + 5$. Po úpravě je levá i pravá strana stejná, rovnice má proto za kořen libovolné číslo $x \in \mathbf{R}$, takže $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

☛ Příklad 17

Uvažujme rovnici

$$x^2 = -4$$

s neznámou $x \in \mathbf{R}$; pro tuto rovnici je *obor řešení* $\mathbf{M} = \mathbf{R}$, *neznámá* x , $L(x) = x^2$, $P(x) = -4$. Tato rovnice nemá žádný reálný kořen, $\mathbf{K} = \emptyset$.

Řešit rovnici znamená určit všechny kořeny (řešení) dané rovnice. Při řešení postupujeme tak, že danou rovnici postupně převádíme na rovnice, které s ní mají – je-li to možné – stejnou množinu kořenů, a to tak dlouho, dokud nedospějeme k rovnici, jejíž množinu kořenů známe.

Úpravy rovnice, které nemění množinu jejích kořenů, se nazývají **ekvivalentní úpravy**; patří mezi ně zejména:

- výměna levé a pravé strany rovnice
- přičtení téhož čísla nebo mnohočlenu k oběma stranám rovnice
- odečtení téhož čísla nebo mnohočlenu od obou stran rovnice
- vynásobení obou stran rovnice týmě nenulovým číslem
- vydělení obou stran rovnice týmě nenulovým číslem

Rovnice, které lze převést jednu v druhou ekvivalentními úpravami, se nazývají **ekvivalentní**.

Po vyřešení rovnice je užitečné zkontrolovat, zda je nalezený výsledek správný; této kontrole se říká **zkouška**. Zkoušku provádíme tak, že vypočtenou hodnotu neznámé dosadíme do levé a pravé strany rovnice. Vyjdou-li nám dvě stejná čísla, je výsledek správný (jestliže jsme správně dosadili a počítali). Vyjdou-li různá čísla, není nalezený výsledek řešením rovnice; pokud jsme prováděli pouze ekvivalentní úpravy, svědčí tato skutečnost o tom, že jsme se během výpočtu, popř. zkoušky, dopustili chyby. Pokud byla v některém kroku použita neekvivalentní úprava (např. druhá mocnina, vynásobení výrazem, který nabyl nulové hodnoty, aj.) a pokud jsme nikde neudělali chybu, znamená negativní výsledek zkoušky to, že nalezenou hodnotu nemůžeme zařadit mezi kořeny rovnice („přibyl“ během výpočtu, ale původní rovnici neřeší).

Poznamenejme, že v případě použití výhradně ekvivalentních úprav není zkouška nutnou součástí výpočtu a slouží jen k ověření správnosti. Objeví-li se však **neekvivalentní úprava**, je zkouška **nezbytnou součástí výpočtu**, neboť vyloučí kořeny upravené rovnice, které nejsou kořeny rovnice původní.

Připomeňme si ekvivalentní úpravy na několika konkrétních příkladech.

☛ **Příklad 18**

Řešme rovnici $2x + 3 = \frac{3}{4}(x - 2)$.

Řešení

1. Nejprve odstraníme zlomek tím, že celou rovnici vynásobíme čtyřmi:

$$4(2x + 3) = 3(x - 2).$$

2. Obě strany upravíme:

$$8x + 12 = 3x - 6.$$

3. K oběma stranám rovnice přičteme $-3x$ (neznámá se pak objeví jen na levé straně) a -12 (neznámou „osamostatníme“):

$$5x = -18.$$

4. Rovnici vynásobíme číslem $\frac{1}{5}$:

$$x = -\frac{18}{5}.$$

Protože všechny prováděné úpravy byly ekvivalentní, má původní rovnice tytéž kořeny jako rovnice, k níž jsme dospěli těmito úpravami, tj. jako rovnice $x = -\frac{18}{5}$.

Pro kontrolu můžeme provést zkoušku: hodnotu $-\frac{18}{5}$ dosadíme do levé (L) a do pravé (P) strany rovnice:

$$L = 2\left(-\frac{18}{5}\right) + 3 = -\frac{36}{5} + 3 = -\frac{21}{5} \qquad P = \frac{3}{4}\left(-\frac{18}{5} - 2\right) = \frac{3}{4}\left(-\frac{28}{5}\right) = -\frac{21}{5}$$

$$L = P$$

Protože hodnoty získané dosazením do obou stran se shodují, je nalezený kořen skutečně řešením zadané rovnice.

Závěr zpravidla **formulujeme** jedním z následujících dvou způsobů:

- a) *Daná rovnice má jediné řešení, a to $x = -\frac{18}{5}$.*
- b) *Množina $\mathbf{K}$ všech kořenů dané rovnice je $\mathbf{K} = \left\{-\frac{18}{5}\right\}$.*

Výše popsané úpravy si pro názornost zapisujeme přímo k upravovaným rovnicím:

$$\begin{array}{rcll} 2x + 3 & = & \frac{3}{4}(x - 2) & | \cdot 4 \\ 4(2x + 3) & = & 3(x - 2) & \\ 8x + 12 & = & 3x - 6 & | - 3x - 12 \\ 5x & = & -18 & | : 5 \\ x & = & -\frac{18}{5} & \end{array}$$

☛ **Příklad 19**

Řešme rovnici $(x - 1)^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 3)$.

Řešení

Úpravy budeme zapisovat již jen stručně:

$$\begin{array}{rcll} (x - 1)^2 - 3x + 2 & = & (x - 2)(x - 3) & \\ x^2 - 5x + 3 & = & x^2 - 5x + 6 & | - x^2 + 5x - 3 \\ 0x^2 + 0x & = & 3 & \end{array}$$

Neexistuje žádné číslo, které by vyhovovalo poslední rovnici – na levé straně je vždy nula, zatímco na straně pravé je nenulové číslo 3. Protože jsme prováděli pouze ekvivalentní úpravy (žádný kořen proto nemohl „zmizet“), nemá řešení ani zadaná rovnice, tj. $\mathbf{K} = \emptyset$.

☛ Příklad 20

Řešme rovnici $(x - 1)^2 - 3x + 5 = (x - 2)(x - 3)$.

Řešení

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 - 3x + 5 &= (x - 2)(x - 3) \\ x^2 - 5x + 6 &= x^2 - 5x + 6 & | -x^2 + 5x - 3 \\ 0x^2 + 0x &= 0\end{aligned}$$

Poslední rovnici vyhovuje každé reálné číslo, proto i řešením původní rovnice je libovolné reálné číslo, $x \in \mathbf{R}$, neboli $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

To, co jsme si ukázali v předchozích dvou příkladech, můžeme zformulovat obecněji takto:

☛ Rovnice s neznámou x , kterou můžeme ekvivalentními úpravami převést do tvaru

$$0 \cdot x = 0,$$

má **nekonečně mnoho řešení** – jejím řešením je **každé reálné číslo**.

☛ Rovnice s neznámou x , kterou můžeme ekvivalentními úpravami převést do tvaru

$$0 \cdot x = b, \quad \text{kde } b \neq 0,$$

nemá žádný kořen.

5.2 Lineární rovnice

Lineární rovnice je rovnice tvaru

$$ax + b = 0, \tag{5.2}$$

kde a, b jsou reálná čísla, $a \neq 0$.

Protože koeficient u neznámé je nenulový, **má lineární rovnice vždy právě jedno řešení**:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Lineární rovnici se však zpravidla rozumí i jakákoli rovnice, kterou je možné do uvedeného tvaru převést ekvivalentními úpravami – původní zadání může vypadat složitěji.

Samotné řešení lineární rovnice je jednoduché a na základě předchozích zkušeností by nemělo dělat nejmenší potíže.

☛ Příklad 21

Řešme rovnici $\frac{9x}{8} - \left(\frac{x-2}{6} + \frac{5x-4}{12} \right) - \left(x - \frac{3x+2}{3} - \frac{3x}{4} \right) = 6 + \frac{2x+1}{3}$.

Řešení

Rovnici vynásobíme číslem 24, nejmenším společným jmenovatelem všech zlomků, které se v ní vyskytují, a pak již snadno vyřešíme:

$$\begin{aligned}27x - 4(x - 2) - 2(5x - 4) - 24x + 8(3x + 2) + 18x &= 144 + 8(2x + 1) \\15x &= 120 \\x &= 8\end{aligned}$$

Množina všech kořenů dané rovnice je $\mathbf{K} = \{8\}$.

Rovnice s neznámou ve jmenovateli

Potřebujeme-li vyřešit například rovnici

$$\frac{x+4}{x-4} = 9, \tag{5.3}$$

stojíme před problémem, že neznámá x je obsažena ve jmenovateli zlomku. Ukážeme si dva způsoby řešení tohoto problému.

1. způsob. V prvním kroku se „zbavíme“ zlomku tím, že obě strany rovnice vynásobíme dvočlenem $x - 4$:

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{x-4} \cdot (x-4) &= 9 \cdot (x-4) \\x+4 &= 9x-36 & | -9x-4 \\-8x &= -40 \\x &= 5\end{aligned}$$

Hned první krok s sebou nese riziko, že provedeme neekvivalentní úpravu: v případě, že by bylo $x - 4 = 0$, vynásobili bychom obě strany rovnice nulou a získali bychom tak rovnici $0 = 0$, která je s původní rovnicí (5.3) neekvivalentní. Takováto hodnota, tj. $x = 4$, je však pro rovnici (5.3) „zakázaná“ – výraz $\frac{x+4}{x-4}$ na levé straně pro ni není definován.

V tomto smyslu budeme říkat, že **rovnice** (5.3) pro $x = 4$ **nemá smysl**. Pro všechny ostatní hodnoty proměnné x daná rovnice smysl má; pro ně je vynásobením obou stran rovnice dvočlenem $x - 4$ ekvivalentní úpravou neměníci množinu kořenů rovnice.

První způsob řešení rovnice s neznámou ve jmenovateli tedy spočívá v tom, že nejprve určíme hodnoty neznámé, pro které nemá daná rovnice smysl. Tyto hodnoty vyloučíme **stanovením podmínek, za kterých jsou všechny výrazy v rovnici definovány**. Za těchto podmínek je pak odstraňování zlomků **ekvivalentní úpravou**. Pro kontrolu můžeme na závěr provést zkoušku; není to sice nutná součást řešení, upozorní nás však na možná přehlédnutí (viz příklad 23).

2. způsob řešení spočívá v tom, že rovnici anulujeme a výraz na levé straně upravíme tak, aby se nezměnil jeho definiční obor. Po úpravách získáme na levé straně zlomek,

o němž umíme rozhodnout, pro které hodnoty proměnné je roven nule:

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{x-4} &= 9 & | -9 \\ \frac{x+4}{x-4} - 9 &= 0 \\ \frac{(x+4) - 9(x-4)}{x-4} &= 0 \\ \frac{-8x+40}{x-4} &= 0\end{aligned}$$

Čítec zlomku na levé straně v poslední rovnici je roven nule pro $x = 5$ a tato hodnota patří do definičního oboru daného zlomku. Poslední rovnici tedy vyhovuje jediné číslo, a to $x = 5$. Protože všechny prováděné úpravy byly ekvivalentní, je toto číslo i jediným kořenem původní rovnice (pro kontrolu bychom opět mohli provést zkoušku).

Výhodou tohoto postupu je skutečnost, že nemusíme přemýšlet o tom, zda náhodou nenásobíme obě strany rovnice nulou – vždy provádíme pouze ekvivalentní úpravy.

Připomeňme, že jsme v závěru řešení využili následující poznatek o zlomcích:

Zlomek obsahující proměnnou je roven nule právě pro ty její hodnoty z definičního oboru tohoto zlomku, pro které je nulový jeho čítec.

Při řešení rovnic je asi přehlednější první způsob; jak však uvidíme dále, druhý způsob „zvítězí“ při řešení nerovnic.

☛ **Příklad 22**

Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$\frac{x+3}{x-5} - 2 = \frac{x+5}{3-x}$$

Řešení

1. způsob. Daná rovnice má smysl pro všechny hodnoty proměnné x , pro něž $x \neq 5$ a $x \neq 3$. Pro tyto hodnoty můžeme psát:

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x-5} - 2 &= \frac{x+5}{3-x} & | \cdot (x-5) \cdot (3-x) \\ (x+3) \cdot (3-x) - 2 \cdot (x-5) \cdot (3-x) &= (x+5) \cdot (x-5) \\ 9 - x^2 - 2(-x^2 + 8x - 15) &= x^2 - 25 \\ x^2 - 16x + 39 &= x^2 - 25 & | -x^2 \\ -16x + 39 &= -25 & | -39 \\ -16x &= -64 & | : (-16) \\ x &= 4\end{aligned}$$

Zkouška:

$$L = \frac{4+3}{4-5} - 2 = -\frac{7}{1} - 2 = -9, \quad P = \frac{4+5}{3-4} = -\frac{9}{1} = -9, \quad L = P$$

2. způsob. Rovnici anulujeme a zlomky na levé straně převedeme na společného jmenovatele:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x-5} - 2 &= \frac{x+5}{3-x} & | - \frac{x+5}{3-x} \\ \frac{x+3}{x-5} - 2 - \frac{x+5}{3-x} &= 0 \\ \frac{(x+3)(3-x) - 2(x-5)(3-x) - (x+5)(x-5)}{(x-5)(3-x)} &= 0 \\ \frac{9 - x^2 - 2(-x^2 + 8x - 15) - (x^2 - 25)}{(x-5)(3-x)} &= 0 \\ \frac{-16x + 64}{(x-5)(3-x)} &= 0 \end{aligned}$$

Čitatel tohoto zlomku je roven nule pro $x = 4$ a tato hodnota je v jeho definičním oboru. Poslední rovnici tedy vyhovuje jediné číslo, a to $x = 4$; protože byly prováděny pouze ekvivalentní úpravy, je tato hodnota zároveň jediným řešením původní rovnice (můžeme ověřit zkouškou).

☛ Příklad 23

Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$\frac{2}{x-6} + \frac{1}{6-x} = \frac{6-x}{x^2-12x-36}$$

Řešení

1. způsob. Jmenovatele zlomku na pravé straně můžeme vyjádřit jako druhou mocninu dvojčlenu $x - 6$, rovnice má tedy smysl pro všechny hodnoty proměnné x , pro které $x \neq 6$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-6} + \frac{1}{6-x} &= \frac{6-x}{(x-6)^2} & | \cdot (x-6)^2 \\ 2 \cdot (x-6) - \frac{1}{x-6} \cdot (x-6)^2 &= 6-x \\ 2x - 12 - (x-6) &= 6-x \\ x - 6 &= 6-x & | + x + 6 \\ 2x &= 12 & | : 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Výpočtem nám vyšla právě ta hodnota proměnné, kterou jsme v úvodu vyloučili. **Rovnice** proto **nemá žádný kořen**.

Pokud bychom si v závěru nezkontrolovali, že jsou splněny úvodní podmínky, upozornila by nás na chybu zkouška, která by ukázala, že výrazy na levé i pravé straně nemají pro $x = 6$ smysl:

$$L = \frac{2}{6-6} + \frac{1}{6-6} = \frac{2}{0} + \frac{1}{0}, \quad P = \frac{6-6}{6^2 - 12 \cdot 6 - 36} = \frac{0}{0}$$

Postupovat jsme mohli i rychleji tak, že bychom nejprve zkrátili zlomek na pravé straně:

$$\frac{6-x}{(x-6)^2} = \frac{6-x}{(6-x)^2} = \frac{1}{(6-x)} \quad \text{pro } x \neq 6$$

Pak by bylo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-6} + \frac{1}{6-x} &= \frac{1}{(6-x)} & | \cdot (x-6) \\ 2-1 &= -1 \\ 1 &= -1 \end{aligned}$$

Odtud je ihned vidět, že rovnice nemá řešení.

2. způsob.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-6} + \frac{1}{6-x} &= \frac{6-x}{(x-6)^2} & | - \frac{6-x}{(x-6)^2} \\ \frac{2}{x-6} + \frac{1}{6-x} - \frac{6-x}{(x-6)^2} &= 0 \\ \frac{2 \cdot (x-6) - 1 \cdot (x-6) - (6-x)}{(x-6)^2} &= 0 \\ \frac{2x - 12 - x + 6 - 6 + x}{(x-6)^2} &= 0 \\ \frac{2x - 12}{(x-6)^2} &= 0 \end{aligned}$$

Čitatel posledního zlomku je roven nule pro $x = 6$, pro tuto hodnotu však zlomek nemá smysl. Poslední rovnice v tomto případě nemá řešení a totéž platí i pro rovnici původní.

☛ Příklad 24

Řešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$\frac{2}{y-1} - \frac{6}{3y+3} - \frac{4}{y^2-1} = 0$$

Řešení

1. způsob. Rozložíme-li jmenovatele ve zlomcích a vydělíme-li obě strany rovnice dvěma,

$$\frac{1}{y-1} - \frac{3}{3(y+1)} - \frac{2}{(y-1)(y+1)} = 0,$$

získáme podmínky $y \neq 1$, $y \neq -1$. Za těchto podmínek je

$$\begin{aligned}\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} - \frac{2}{(y-1)(y+1)} &= 0 \quad | \cdot (y-1) \cdot (y+1) \\ (y+1) - (y-1) - 2 &= 0 \\ y+1 - y+1 - 2 &= 0 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Rovnice má řešení pro každou hodnotu proměnné y , pro kterou má smysl, tedy pro každé reálné číslo kromě 1 a -1 .

2. způsob.

$$\begin{aligned}\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} - \frac{2}{(y-1)(y+1)} &= 0 \\ \frac{(y+1) - (y-1) - 2}{(y-1)(y+1)} &= 0 \\ \frac{y+1 - y+1 - 2}{(y-1)(y+1)} &= 0 \\ \frac{0}{(y-1)(y+1)} &= 0\end{aligned}$$

Poslední rovnici vyhovuje každé reálné číslo, pro něž má zlomek na levé straně smysl, tj. každé reálné číslo kromě 1 a -1 .

Praktické problémy vedoucí na řešení lineární rovnice

Na řešení lineární rovnice vede řada praktických problémů. Pro ilustraci zde uvedme tři z nich (další jsou obsaženy v úlohách).

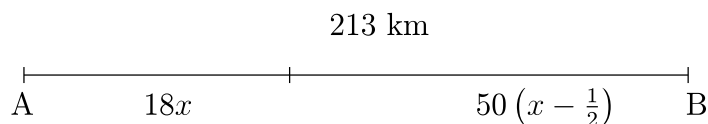
☛ Příklad 25

Ze dvou míst A , B vzdálených od sebe 213 km vyjedou proti sobě a v téže okamžiku auto rychlostí 50 km/h a cyklista průměrnou rychlostí 18 km/h. Určete, za jak dlouho od vyjetí se setkají, jestliže auto krátce po vyjetí mělo poruchu, k jejíž opravě bylo zapotřebí 30 minut.

Řešení

Označme hledaný čas symbolem x . Připomeňme si, že průměrná rychlost vždy udává podíl celkové dráhy a celkového času; celková dráha je tedy součinem průměrné rychlosti a celkového času. Zadané údaje můžeme shrnout takto:

doba (v h) od vyjetí auta i cyklisty do jejich setkání		x
vzdálenost (v km), kterou ujede cyklista do místa setkání		$18x$
vzdálenost (v km), kterou ujede auto do místa setkání		$50 \left(x - \frac{1}{2} \right)$



OBR. 5.12 K ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 25

Podle obrázku 5.12 sestavíme rovnici:

$$18x + 50 \left(x - \frac{1}{2} \right) = 213 \quad (5.4)$$

a po snadné úpravě vyřešíme:

$$\begin{aligned} 68x &= 238 \\ x &= 3,5 \end{aligned}$$

Zkouška, jak víme, v tomto případě není nutná (přesto si můžeme zkusit dosadit hodnotu 3,5 do levé strany rovnice (5.4)). Užitečné je ovšem ověření, zda náš výsledek vyhovuje původnímu slovnímu zadání – a tedy zda byla rovnice (5.4) vůbec správně sestavena:

Cyklista za 3,5 hodiny ujel při rychlosti 18 km/h dráhu 63 km; auto ujelo za 3 hodiny jízdy (0,5 hodiny stálo) při rychlosti 50 km/h dráhu 150 km; vzdálenost mezi výchozími body je odtud 63 km + 150 km = 213 km, což souhlasí se zadanou vzdáleností bodů A , B .

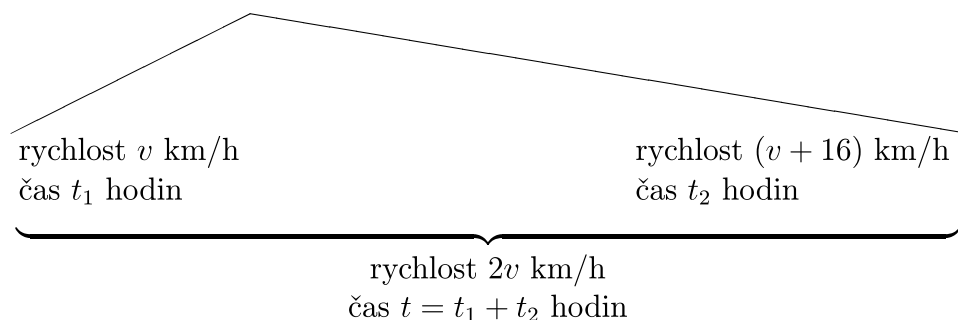
Závěr řešení: Auto a cyklista se potkají za 3,5 hodiny po svém výjezdu.

☛ Příklad 26

První část cyklistické trasy tvoří stoupání dlouhé 3 km, zbylou část klesání dlouhé 13 km. Tomášova průměrná rychlost na celé trase byla dvojnásobkem jeho rychlosti na první části trasy, jež byla o 16 km/h menší než na druhé části trasy. Za jak dlouho ujel Tomáš celou trasu?

Řešení

Označme Tomášovu rychlost v prvním úseku o délce 3 km symbolem v (v km/h). Podle zadání byla Tomášova rychlost v druhém úseku rovna $(v + 16)$ km/h a průměrná rychlost na celé trase $2v$ km/h:



OBR. 5.13 K ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 26

Celkový čas, který Tomáš potřeboval k ujetí celé trasy, můžeme vyjádřit dvojím způsobem: jednak na základě znalosti průměrné rychlosti na celé trase, která udává podíl známé celkové uražené dráhy a hledaného celkového času, tj.

$$2v = \frac{3 + 13}{t} = \frac{16}{t} \quad \implies \quad t = \frac{16}{2v},$$

jednak na základě znalosti rychlostí v jednotlivých úsecích, tj.

$$v = \frac{3}{t_1}, \quad v + 16 = \frac{13}{t_2} \quad \implies \quad t_1 = \frac{3}{v}, \quad t_2 = \frac{13}{v + 16};$$

celkový čas je součtem $t = t_1 + t_2$, obdržíme proto rovnici

$$\begin{aligned} \frac{3}{v} + \frac{13}{v + 16} &= \frac{16}{2v} && | \cdot 2v \cdot (v + 16) \\ 6 \cdot (v + 16) + 26v &= 16 \cdot (v + 16) \\ 6v + 96 + 26v &= 16v + 256 && | - 16v - 96 \\ 16v &= 160 && | : 16 \\ v &= 10 \end{aligned}$$

Odtud ihned dostáváme:

$$t = \frac{16}{2v} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5},$$

takže Tomášovi trvala celá trasa $\frac{4}{5}$ hodiny neboli 48 minut.

Zároveň je také

$$t_1 = \frac{3}{10}, \quad t_2 = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{3}{10} + \frac{1}{2} = \frac{3 + 5}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$

takže Tomáš jel první část trasy rychlostí 10 km/h a urazil ji za $\frac{3}{10}$ hodiny, druhou část jel rychlostí 26 km/h a trvalo mu to $\frac{1}{2}$ hodiny. Celou trasu Tomáš jel $\frac{4}{5}$ hodiny neboli 48 minut – toto druhé dosazení nám posloužilo jako ověření.

Závěr: Tomáš ujel celou trasu za 48 minut.

☛ **Příklad 27**

Mořská voda obsahuje 5% soli. Určete, kolik kilogramů destilované vody je nutno smísit se 40 kilogramy mořské vody, aby ve vzniklé směsi byla 2% soli.

Řešení

Označme symbolem x množství destilované vody (v kilogramech), kterou je nutno přidat. Podle zadání je dále:

$$\begin{array}{ll} \text{množství soli (v kg) ve 40 kg mořské vody} & \dots\dots\dots 40 \cdot \frac{5}{100} = 2 \\ \text{množství soli (v kg) v požadované směsi} & \dots\dots\dots (40 + x) \cdot \frac{2}{100} \end{array}$$

Přidáním destilované vody se nezměnilo množství soli, platí proto rovnost:

$$(40 + x) \cdot \frac{2}{100} = 40 \cdot \frac{5}{100} \quad (5.5)$$

Odtud pak jednoduchými úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned} 2(40 + x) &= 40 \cdot 5 \\ 40 + x &= 20 \cdot 5 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Ověřme splnění slovního zadání: přidáme-li ke 40 kilogramům mořské vody, v níž jsou obsaženy 2 kg soli, 60 kg destilované vody, získáme směs o hmotnosti 100 kg, v níž jsou 2 kg soli, tedy 2 %; tento výsledek souhlasí se zadáním.

Závěr: Do 40 kg mořské vody je pro dosažení potřebné koncentrace třeba přidat 60 kg destilované vody.

5.3 Kvadratické rovnice

Kvadratická rovnice je rovnice tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (5.6)$$

kde a, b, c jsou reálná čísla, $a \neq 0$ (je to tedy stručný název pro **algebraickou rovnici druhého stupně**). Člen ax^2 se nazývá **kvadratický člen**, bx se nazývá **lineární člen** a c se nazývá **absolutní člen** kvadratické rovnice.

V některých případech dokážeme kořeny (označené jako r, s) přímo „uhodnout“:

Vydělme rovnici (5.6) číslem a a uvažujme takto vzniklou rovnici:

$$x^2 + px + q, \quad p, q \in \mathbf{Z}. \quad (5.7)$$

Rozložíme kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$ na součin lineárních dvojčlenů $(x - r)(x - s)$, kde r, s jsou celá čísla:

Má-li platit

$$x^2 + px + q = (x - r)(x - s) = x^2 - (r + s)x + rs, \quad \text{kde } r, s \text{ jsou celá čísla,}$$

musí také platit:

$$r + s = -p \quad \text{a zároveň} \quad rs = q.$$

Pokud existují, určíme tedy hledaná čísla r, s z této dvojice podmínek: Např. v rozkladu mnohočlenu $x^2 - 3x + 2$ musí být:

$$rs = 2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 \\ (-1) \cdot (-2) \end{bmatrix}$$

z těchto dvou možností vybereme tu, pro niž $r + s = 3$, tj. $r = 1, s = 2$ (nebo též $r = 2, s = 1$), takže $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Ne vždy jsou ovšem kořeny přijatelně malá (v absolutní hodnotě) celá čísla. V každém případě ale můžeme použít vzorec, který se odvodí následujícím způsobem.

Vynásobme rovnici (5.6) nenulovým číslem a :

$$(ax)^2 + abx + ac = 0$$

a doplňme levou stranu na čtverec:

$$\begin{aligned} \left[(ax)^2 + \frac{2abx}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] + ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= 0 \\ \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4} &= 0 & | \cdot 4 \\ 4 \cdot \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - (b^2 - 4ac) &= 0 \\ (2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) &= 0 \end{aligned}$$

Poslední rovnice je s původní kvadratickou rovnicí tvaru (5.6) ekvivalentní; podívejme se, za jakých podmínek má tato rovnice řešení a jaký počet. Pro jednoduchost označme

$$D = b^2 - 4ac$$

tzv. **diskriminant kvadratické rovnice**. Pak získá poslední rovnice tvar

$$(2ax + b)^2 - D = 0.$$

Je-li $D < 0$, nemá rovnice

$$(2ax + b)^2 = D$$

řešení, neboť druhá mocnina na levé straně nemůže být nikdy záporná. Proto nemá řešení ani původní rovnice (5.6).

Je-li $D \geq 0$, má smysl výraz $\sqrt{D}$ a můžeme psát:

$$\begin{aligned} (2ax + b)^2 - D &= 0 \\ (2ax + b)^2 - (\sqrt{D})^2 &= 0 \\ (2ax + b + \sqrt{D})(2ax + b - \sqrt{D}) &= 0 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že platí:

$$\begin{aligned} 2ax + b + \sqrt{D} &= 0, & \text{tj. } x &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \\ \text{nebo} & & & \\ 2ax + b - \sqrt{D} &= 0, & \text{tj. } x &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}. \end{aligned}$$

Tyto kořeny obvykle zapisujeme dohromady:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Pro $D = 0$ oba kořeny splynou v jediný:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Celkem tedy:

O kvadratické rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$, s diskriminantem $D = b^2 - 4ac$ platí:

↪ pro $D > 0$ má právě dva různé reálné kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{2a};$$

↪ pro $D = 0$ má jeden dvojnásobný reálný kořen:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a};$$

↪ pro $D < 0$ nemá žádný reálný kořen.

Uvedené vztahy pro kořeny kvadratické rovnice je dobré si zapamatovat; ušetříme si tak hodně času při řešení úloh.

☛ **Příklad 28**

V oboru reálných čísel řešte rovnici $x^2 - 13x + 42 = 0$.

Řešení

Diskriminant dané rovnice je $D = 169 - 4 \cdot 1 \cdot 42 = 169 - 168 = 1$, takže

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm 1}{2},$$

tj.

$$x_1 = \frac{13 + 1}{2} = 7, \quad x_2 = \frac{13 - 1}{2} = 6.$$

Množina všech kořenů dané rovnice je $\mathbf{K} = \{6, 7\}$.

☛ **Příklad 29**

V oboru reálných čísel řešte rovnici $4x^2 + 11x + 8 = 0$.

Řešení

Diskriminant dané rovnice je $D = 121 - 4 \cdot 4 \cdot 8 = 121 - 128 = -7 < 0$, rovnice proto nemá v oboru reálných čísel žádný kořen, $\mathbf{K} = \emptyset$.

☛ Příklad 30

V oboru reálných čísel řešte rovnici $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Řešení

Diskriminant dané rovnice je $D = 144 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$, takže

$$x_1 = x_2 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Rovnice má jeden dvojnásobný kořen, $\mathbf{K} = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.

Rovnice s neznámou ve jmenovateli vedoucí na kvadratické rovnice

Ne vždy je kvadratická rovnice, kterou máme řešit, zapsaná přímo ve tvaru (5.6) a je třeba ji nejprve do tohoto tvaru upravit. Je-li v zadání neznámá ve jmenovateli, postupujeme podobně jako v případě lineárních rovnic.

☛ Příklad 31

V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\frac{4}{x+2} + \frac{2x}{x-2} = \frac{16}{x^2-4} - \frac{6}{x+2}$$

Řešení

Nejdříve si vyjádříme podmínky, za kterých má daná rovnice smysl: $x \neq 2$, $x \neq -2$.

Za těchto podmínek můžeme řešit:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+2} + \frac{2x}{x-2} &= \frac{16}{(x+2)(x-2)} - \frac{6}{x+2} && | \cdot (x+2) \cdot (x-2) \\ 4(x-2) + 2x(x+2) &= 16 - 6(x-2) \\ 4x - 8 + 2x^2 + 4x &= 16 - 6x + 12 \\ 2x^2 + 14x - 36 &= 0 \\ x^2 + 7x - 18 &= 0 \end{aligned}$$

$D = 49 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 49 + 72 = 121$, takže

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{2},$$

tj.

$$x_1 = \frac{-7+11}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{-7-11}{2} = -9.$$

Pro hodnotu $x_1 = 2$ nemá zadaná rovnice smysl, řešením je proto pouze $x_2 = -9$, $\mathbf{K} = \{-9\}$.

5.4 Iracionální rovnice

Iracionální rovnice s jednou neznámou $x \in \mathbf{R}$ je rovnice obsahující **odmocniny z neznámé nebo z výrazů s neznámou**. Při jejím řešení se zpravidla provádí umocňování obou stran rovnice, **nutnou součástí řešení iracionální rovnice je proto zkouška**, pomocí níž ze všech kořenů algebraické rovnice vzniklé umocněním určíme ty, které jsou kořeny původní zadané iracionální rovnice (pro jednoduchost si představme rovnici $x = -1$; umocněním na druhou získáme rovnici $x^2 = 1$, jíž kromě původního kořene $x = -1$ vyhovuje také $x = 1$). Způsob řešení si ilustrujme na dvou příkladech.

☛ Příklad 32

Řešte v $\mathbf{R}$ iracionální rovnici $\sqrt{5x+6} - x = 2$.

Řešení

Rovnici nejprve upravíme tak, aby odmocnina byla na levé straně osamostatněna, pak ji umocněním odstraníme.

$$\begin{aligned} \sqrt{5x+6} &= 2+x & |^2 & & 5x+6 \geq 0 \\ 5x+6 &= 4+4x+x^2 & & & x \geq -\frac{6}{5} \\ x^2 - x - 2 &= 0 & \implies & & x_1 = -1, x_2 = 2 \end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} x_1 = -1 : & \quad L = \sqrt{-5+6} + 1 = 1 + 1 = 2 = P \\ x_2 = 2 : & \quad L = \sqrt{10+6} - 2 = 4 - 2 = 2 = P \end{aligned}$$

V tomto případě oba kořeny vyhovují zadané iracionální rovnici a je proto $\mathbf{K} = \{-1, 2\}$.

☛ Příklad 33

Řešte v $\mathbf{R}$ iracionální rovnici $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$.

Řešení

Rovnici nejprve upravíme tak, aby jedna z odmocnin byla na jedné straně sama; po umocnění obdržíme iracionální rovnici s jednou odmocninou; tu pak osamostatníme a ještě jednou umocníme.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-4} &= 1 + \sqrt{x+5} & |^2 & & 2x-4 \geq 0 \wedge x+5 \geq 0 \\ 2x-4 &= 1 + 2\sqrt{x+5} + x+5 & & & \underbrace{x \geq 2 \wedge x \geq -5}_{x \geq 2} \\ x-10 &= 2\sqrt{x+5} & |^2 & & \\ x^2 - 20x + 100 &= 4(x+5) & & & \\ x^2 - 24x + 80 &= 0 & \implies & & x_1 = 4, \underline{\underline{x_2 = 20}} \end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} x_1 = 4 : & \quad L = \sqrt{8-4} - \sqrt{4+5} = 2 - 3 = -1, & P = 1, & L \neq P \\ x_2 = 20 : & \quad L = \sqrt{40-4} - \sqrt{20+5} = 6 - 5 = 1, & P = 1, & L = P \end{aligned}$$

V tomto případě vyhovuje zadané iracionální rovnici pouze druhý kořen a je tedy $\mathbf{K} = \{20\}$.

5.5 Exponenciální a logaritmické rovnice

V části ?? se budeme zabývat základními elementárními funkcemi a jejich grafickým znázorněním, speciálně i funkcí exponenciální a logaritmickou.

Exponenciální funkce je definována vztahem (3.4) (viz str. 35); je to funkce, která každému reálnému x přiřadí hodnotu $y = a^x$, kde $a > 0$, $a \neq 1$.

Často potřebujeme naopak pro danou hodnotu proměnné x zjistit, co musí být dosaženo za y do exponentu ve výrazu a^y , aby platilo $x = a^y$. K určení exponentu slouží tzv. **logaritmická funkce** definovaná vztahem (3.5), pro kterou platí:

$$y = \log_a x \quad \text{právě když} \quad x = a^y.$$

Do argumentu logaritmické funkce může být dosaženo pouze libovolné **kladné** číslo – tento argument má být výsledkem mocniny kladného čísla, což je vždy kladná hodnota. Kdykoli tedy budeme pracovat s výrazem, který obsahuje logaritmy (nyní se již nejedná o algebraický výraz, ale o tzv. **výraz transcendentní**), musíme si uvědomit, že **argument logaritmu musí být kladný** a podle toho určit podmínky.

Z definice logaritmické funkce, ze vzorců pro počítání s mocninami o stejném základu a z faktu, že exponenciální funkce je ryze monotónní, plynou následující **pravidla pro počítání s logaritmy**:

Nechť $a > 0$, $a \neq 1$ a nechtě x_1, x_2 jsou libovolná kladná čísla. Potom platí:

$$\begin{aligned}\log_a(x_1 x_2) &= \log_a x_1 + \log_a x_2 \\ \log_a \frac{x_1}{x_2} &= \log_a x_1 - \log_a x_2 \\ \log_a x^r &= r \log_a x \quad \text{pro každé } r \in \mathbf{R}\end{aligned}$$

K označení ještě dodejme, že pro $a = 10$ se místo $\log_{10} x$ píše pouze $\log x$ a pro $a = e$ se píše $\ln x$.

Postup při řešení rovnice, která obsahuje exponenciální nebo logaritmickou funkci, si ukážeme na následujících příkladech.

☛ **Příklad 34**

V oboru reálných čísel řešte rovnici $3^{2x-3} = 81$.

Řešení

Číslo 81 na pravé straně rovnice lze vyjádřit jako mocninu čísla 3, tj. $81 = 3^4$. Protože exponenciální funkce je prostá (pro dvě různé hodnoty argumentu jsou i funkční hodnoty různé, neboli funkce se nikde „neopakuje“; viz str. 26 a ??), je rovnost

$$3^{2x-3} = 3^4$$

ekvivalentní s rovností exponentů:

$$2x - 3 = 4,$$

odkud dostáváme $x = \frac{7}{2}$, takže $\mathbf{K} = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$.

☛ Příklad 35

V oboru reálných čísel řešte rovnici $4^x + 3^{x+4} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$.

Řešení

V tomto případě se nám nepodaří vyjádřit obě strany rovnice jako mocninu téhož základu, budeme si proto muset pomoci logaritmováním. Nejprve se budeme snažit získat na obou stranách součin, abychom pak zlogaritmováním rovnici upravili do tvaru s neznámou „mimo exponent“. Při logaritmování využíváme toho, že logaritmická funkce je prostá (viz str. ??) a zlogaritmování obou stran rovnice je proto pro všechny hodnoty proměnné, pro něž má smysl, ekvivalentní úpravou:

$$\begin{aligned} 3^{x+4} + 3^{x+2} &= 4^{x+3} - 4^x \\ 3^x \cdot 81 + 3^x \cdot 9 &= 4^x \cdot 64 - 4^x \\ 3^x \cdot (81 + 9) &= 4^x \cdot (64 - 1) \\ 3^x \cdot 90 &= 4^x \cdot 63 \\ \left(\frac{3}{4}\right)^x &= \frac{7}{10} \quad | \log \\ \log \left(\frac{3}{4}\right)^x &= \log \frac{7}{10} \\ x \cdot \log \frac{3}{4} &= \log \frac{7}{10} \implies x = \frac{\log 0,7}{\log 0,75} \doteq 1,24 \end{aligned}$$

Je tedy $\mathbf{K} = \left\{ \frac{\log 0,7}{\log 0,75} \right\}$.

☛ Příklad 36

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\log_2 \sqrt{2x-3} + \log_2 \sqrt{x-5} = \log_2 24 - 3$$

Řešení

Obě strany rovnice vyjádříme pomocí jednoho logaritmu a potom opět využijeme toho, že logaritmická funkce je prostá, takže rovnost hodnot logaritmů je ekvivalentní s rovností argumentů. Zároveň hned na začátku určíme podmínky, které musí neznámá x splňovat (pod odmocninou musí být nezáporné číslo, logaritmus má smysl jen pro čísla kladná):

$$\begin{aligned} \log_2 \left[\sqrt{(2x-3)} \sqrt{(x-5)} \right] &= \log_2 24 - \log_2 2^3 & 2x-3 > 0 \wedge x-5 > 0 \\ \log_2 \sqrt{(2x-3)(x-5)} &= \log_2 \frac{24}{8} & 2x > 3 \wedge x > 5 \\ \frac{1}{2} \log_2 (2x-3)(x-5) &= \log_2 3 & \underbrace{x > \frac{3}{2} \wedge x > 5}_{x > 5} \\ \log_2 (2x-3)(x-5) &= 2 \cdot \log_2 3 \\ \log_2 (2x-3)(x-5) &= \log_2 3^2 \\ (2x-3)(x-5) &= 9 \\ 2x^2 - 13x + 15 &= 9 \\ 2x^2 - 13x + 6 &= 0 \implies \underline{\underline{x_1 = 6}}, \quad x_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ze dvou získaných kořenů kvadratické rovnice vyhovuje zadání jen $x = 6$; kořen $x = \frac{1}{2}$ nesplňuje podmínky řešitelnosti (pod odmocninou ve výrazu $\sqrt{2x-3}$ by bylo záporné číslo).

Je tedy $\mathbf{K} = \{6\}$.

5.6 Goniometrické rovnice

Základní goniometrické rovnice:

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad a \in \langle -1, 1 \rangle, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad a \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\operatorname{cotg} x = a, \quad a \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi\}$$

☛ Příklad 37

$$\sin x = -0,5$$

Řešení

$$x_1 = 210^\circ, \quad x_2 = 330^\circ$$

$$K = k \in \mathbf{Z} \cup \{210^\circ + 2k\pi, 330^\circ + 2k\pi\}$$

Složitější goniometrické rovnice:

Je-li v rovnici více goniometrických funkcí, převedeme je na jednu goniometrickou funkci. Pokud odmocňujeme, musíme provést zkoušku.

Při výpočtu využíváme vlastností goniometrických funkcí popsaných v části 4.

☛ Příklad 38

$$\sin 3x = \cos 2x$$

$$\sin 3x - \sin (90^\circ - 2x) = 0$$

$$2 \cdot \cos \frac{3x + 90^\circ - 2x}{2} \cdot \sin \frac{3x - 90^\circ + 2x}{2} = 0$$

$$\cos \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0 \vee \sin \frac{5x - \frac{\pi}{2}}{2} = 0$$

$$\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \frac{5x - \frac{\pi}{2}}{2} = k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi$$

6 SOUSTAVY ROVNIC

6.1 Rovnice a soustavy rovnic se dvěma neznámými

Pojem rovnice s jednou neznámou, který jsme zavedli v úvodu části 5.1 vztahem (5.1), můžeme zobecnit na **rovnici se dvěma neznámými** x, y :

$$L(x, y) = P(x, y) \quad (6.1)$$

jejíž **levá strana** $L(x, y)$ a **pravá strana** $P(x, y)$ jsou výrazy s neznámými x, y .

Řešit rovnici (6.1) znamená určit všechny uspořádané dvojice $[x, y]$ z daného číselného oboru $\mathbf{M}$, které danou rovnici splňují, tj. po dosazení do ní nastává rovnost; každou takovou uspořádanou dvojici nazýváme **řešení rovnice**.

Speciálně **lineární rovnice se dvěma neznámými** je rovnice tvaru

$$ax + by + c = 0, \quad (6.2)$$

kde a, b, c jsou reálná čísla, přičemž aspoň jedno z čísel a, b je nenulové.

V části ?? se podíváme na grafické řešení rovnic, na tomto místě se zaměříme pouze na řešení číselné. V rovnici (6.2) mohou nastat tři případy:

a) $a \neq 0, b \neq 0$.

V tomto případě můžeme jednu neznámou zvolit zcela libovolně a druhou určíme tak, aby byla daná rovnice tvaru (6.2) splněna. Můžeme tedy psát: $x = t$, kde t je libovolné reálné číslo,

$$y = -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b}.$$

Množinou všech řešení rovnice je proto množina všech uspořádaných dvojic tvaru $\left[t, -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b}\right]$, kde t je libovolné reálné číslo.

b) $a = 0, b \neq 0$, tj. rovnice (6.2) přechází do tvaru $by + c = 0$.

Vypočteme-li přímo y , dostaneme

$$y = -\frac{c}{b}.$$

V tomto případě tedy máme danou podmínku, jaké hodnoty musí nabývat neznámá y ; pro x ze zadání žádná podmínka neplyne, může proto nabývat libovolné hodnoty. Množinou všech řešení pak bude množina všech uspořádaných dvojic $\left[t, -\frac{c}{b}\right]$, kde t je libovolné reálné číslo.

c) $a \neq 0$, $b = 0$, tj. rovnice (6.2) přechází do tvaru $ax + c = 0$.

Vypočteme-li přímo x , dostaneme

$$x = -\frac{c}{a}.$$

V tomto případě tedy máme danou podmínku, jaké hodnoty musí nabývat neznámá x ; pro y ze zadání žádná podmínka neplyne, může proto nabývat libovolné hodnoty. Množinou všech řešení pak bude množina všech uspořádaných dvojic $\left[-\frac{c}{a}, t\right]$, kde t je libovolné reálné číslo.

Z výše uvedené diskuse je vidět, že lineární rovnice (6.2) se dvěma neznámými má vždy **nekonečně mnoho řešení** (to ovšem neznamená, že řešením je libovolná dvojice reálných čísel $[x, y]$!).

☛ **Příklad 39**

V oboru reálných čísel určete všechna řešení rovnice $2x + y = 5$.

Řešení

Jednu z neznámých můžeme volit libovolně, například $x = t$, kde t je libovolné reálné číslo, a druhou určíme tak, aby byla splněna zadaná rovnice: $y = 5 - 2t$. Množina všech řešení dané rovnice je tedy množina všech uspořádaných dvojic $[t, 5 - 2t]$, kde t nabývá všech reálných hodnot.

☛ **Příklad 40**

V $\mathbf{R}$ určete všechny uspořádané dvojice $[x, y]$, které jsou řešením rovnice

$$y + 5 = 0.$$

Řešení

Z rovnice vyjádříme neznámou y , tj. $y = -5$; neznámá x může nabývat libovolných hodnot, označíme proto $x = t$, kde $t \in \mathbf{R}$. Množina všech řešení dané rovnice je množina všech uspořádaných dvojic $[t, -5]$, kde t nabývá všech reálných hodnot.

☛ **Příklad 41**

V $\mathbf{R}$ určete všechny uspořádané dvojice $[x, y]$, které jsou řešením rovnice

$$2x + 5 = 0.$$

Řešení

Z rovnice vyjádříme neznámou x , tj. $x = -\frac{5}{2}$; neznámá y může nabývat libovolných hodnot, označíme proto $y = t$, kde $t \in \mathbf{R}$. Množina všech řešení dané rovnice je množina všech uspořádaných dvojic $[-\frac{5}{2}, t]$, kde t nabývá všech reálných hodnot.

6.2 Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

Obvykle neřešíme jednotlivé rovnice se dvěma neznámými, ale dvě takové rovnice, které mají být splněny **zároveň**. V tomto případě hovoříme o **soustavě lineárních rovnic se dvěma neznámými**. **Řešení soustavy** je pak řešení, které **vyhovuje oběma daným rovnicím**.

Při řešení soustav lineárních rovnic můžeme použít jednu ze tří základních metod, popř. jejich libovolnou kombinaci:

- ➡ **Metoda sčítací (adiční)** spočívá v tom, že se každá z rovnic soustavy vynásobí vhodným číslem tak, aby se po sečtení takto vynásobených rovnic eliminovala (vyloučila) jedna z neznámých.
- ➡ **Metoda dosazovací (substituční)** spočívá v tom, že se z jedné rovnice vyjádří jedna neznámá pomocí druhé neznámé a toto vyjádření se dosadí do druhé rovnice; tím se první neznámá eliminuje a vznikne rovnice pro druhou neznámou.
- ➡ **Metoda srovnávací (komparační)** spočívá v tom, že se z obou rovnic vyjádří tatáž neznámá a obě vyjádření se porovnají; tím se opět první neznámá eliminuje a vznikne rovnice pro druhou neznámou.

Nakonec vždy můžeme provést zkoušku dosazením řešení do obou rovnic. Protože jsme však prováděli pouze ekvivalentní úpravy, není zkouška nutnou součástí řešení, ale slouží jen pro kontrolu (i když užitečnou).

Řešení soustav lineárních rovnic a možné případy, které mohou při řešení nastat, si ukážeme na následujících konkrétních příkladech.

☛ **Příklad 42**

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 11 \\ x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

Řešení

1. způsob – metoda sčítací (adiční)

Vynásobíme-li například druhou rovnici číslem -5 , získáme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 11 \\ -5x - 10y &= -35 \end{aligned}$$

Sečtením obou rovnic eliminujeme proměnnou x a obdržíme rovnici s jednou neznámou y ,

$$-6y = -24,$$

kterou snadno vyřešíme:

$$y = 4$$

Získanou hodnotu dosadíme do kterékoli z dvojice zadaných rovnic a dopočítáme hodnotu neznámé x ; v tomto případě bude jednodušší dosadit do druhé rovnice:

$$\begin{aligned}x + 2 \cdot 4 &= 7 \\x &= -1\end{aligned}$$

Daná soustava má v tomto případě jediné řešení, a to $[x, y] = [-1, 4]$. Stejně jako u rovnic s jednou neznámou, i u soustav se množina řešení obvykle zapisuje ve tvaru

$$\mathbf{K} = \{[-1, 4]\}.$$

Při řešení jsme také mohli postupovat tak, že bychom druhou rovnici vynásobili číslem -2 ; při následném sečtení obou rovnic by se eliminovala neznámá y , vypočítala by se hodnota neznámé x a po dosazení do jedné z původních rovnic by se dopočítala hodnota y . Vždy se tedy snažíme jednu z rovnic, popř. každou z nich, vynásobit vhodným číslem tak, aby u jedné neznámé byla v obou rovnicích opačná čísla.

2. způsob – metoda dosazovací (substituční)

Z druhé rovnice vyjádříme proměnnou x a toto vyjádření dosadíme do rovnice první:

$$\begin{aligned}x &= \underline{7 - 2y} \\5 \cdot \underline{(7 - 2y)} + 4y &= 11\end{aligned}$$

a ze získané rovnice vypočteme y :

$$\begin{aligned}35 - 10y + 4y &= 11 \\-6y &= -24 \\y &= 4\end{aligned}$$

Nyní dosadíme hodnotu $y = 4$ do vyjádření $x = \underline{7 - 2y}$ a vypočteme x :

$$x = 7 - 2 \cdot 4 = -1$$

Opět tak dostáváme množinu řešení dané soustavy $\mathbf{K} = \{[-1, 4]\}$.

3. způsob – metoda srovnávací (komparační)

Z obou rovnic vyjádříme (například) neznámou x :

$$\begin{aligned}x &= \frac{11 - 4y}{5} \\x &= 7 - 2y\end{aligned}$$

Porovnáním těchto dvou vyjádření téže neznámé dostaneme rovnici:

$$\begin{aligned}\frac{11 - 4y}{5} &= 7 - 2y & | \cdot 5 \\11 - 4y &= 35 - 10y \\6y &= 24 \\y &= 4\end{aligned}$$

Dosazením hodnoty $y = 4$ do jednoho z vyjádření neznámé x (v tomto případě raději do druhého) vypočteme x :

$$x = 7 - 2 \cdot 4 = -1$$

Opět je tedy $\mathbf{K} = \{[-1, 4]\}$.

☛ **Příklad 43**

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 4x + 7y &= 26 \\ 3x + 5y &= 19 \end{aligned}$$

Řešení

Metoda sčítací. Abychom eliminovali proměnnou x , vynásobíme první rovnici číslem 3 a druhou číslem -4 (tak, aby u této proměnné byla opačná čísla; podobně bychom mohli první rovnici vynásobit číslem 5 a druhou -7 , čímž bychom při sečtení eliminovali proměnnou y):

$$\begin{array}{rcll} 4x + 7y & = & 26 & | \cdot 3 \\ 3x + 5y & = & 19 & | \cdot (-4) \\ \hline 12x + 21y & = & 78 & \\ -12x - 20y & = & -76 & \end{array}$$

Po sečtení získáme rovnici s jednou neznámou y :

$$y = 2$$

Získanou hodnotu dosadíme do jedné z dvojice původních rovnic, například do druhé, a vypočteme x :

$$\begin{aligned} 3x + 5 \cdot 2 &= 19 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Množina všech řešení dané soustavy rovnic je tedy $\mathbf{K} = \{[3, 2]\}$.

Metoda dosazovací. Z druhé rovnice například vyjádříme neznámou x :

$$x = \frac{19 - 5y}{3}$$

Po dosazení do první rovnice obdržíme lineární rovnici s jednou neznámou, kterou vyřešíme:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{19 - 5y}{3} + 7y &= 26 & | \cdot 3 \\ 4(19 - 5y) + 21y &= 78 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Dosazením do vyjádření $x = \frac{19 - 5y}{3}$ získáme:

$$x = \frac{19 - 5 \cdot 2}{3} = 3$$

Množina všech řešení dané soustavy rovnic je tedy opět $\mathbf{K} = \{[3, 2]\}$.

Metoda srovnávací. Z obou rovnic vyjádříme například neznámou x :

$$\begin{aligned}x &= \frac{26 - 7y}{4} \\x &= \frac{19 - 5y}{3}\end{aligned}$$

Porovnáním těchto vyjádření dostaneme rovnici s jednou neznámou y , kterou vyřešíme:

$$\begin{aligned}\frac{26 - 7y}{4} &= \frac{19 - 5y}{3} & | \cdot 12 \\3(26 - 7y) &= 4(19 - 5y) \\78 - 21y &= 76 - 20y \\y &= 2\end{aligned}$$

Po dosazení hodnoty $y = 2$ do jednoho z vyjádření pro x získáme $x = 3$, takže opět $\mathbf{K} = \{[3, 2]\}$.

☛ **Příklad 44**

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}4x - y &= 1 \\-20x + 5y &= -5\end{aligned}$$

Řešení

Ukážeme si jen jeden způsob řešení; zbývajících dva si laskavý čtenář může vyzkoušet sám.

Metoda sčítací. Abychom eliminovali například proměnnou y , vynásobíme první rovnici číslem 5 :

$$\begin{array}{rcl}4x - y & = & 1 \\-20x + 5y & = & -5 \\ \hline 20x - 5y & = & 5 \\-20x + 5y & = & -5\end{array} \quad | \cdot 5$$

Po sečtení pak dostaneme

$$0x = 0.$$

Tato rovnost platí vždy, takže za x můžeme zvolit libovolné reálné číslo: $x = t$, kde $t \in \mathbf{R}$. Dosazením do první rovnice pak vyjádříme y :

$$y = 4t - 1$$

Řešením zadané soustavy je tedy jakákoli uspořádaná dvojice $[t, 4t - 1]$, kde t je libovolné reálné číslo. Zadaná soustava má v tomto případě **nekonečně mnoho řešení**,

$$\mathbf{K} = \{[t, 4t - 1], t \in \mathbf{R}\}.$$

Povšimněme si, že druhá rovnice byla (-5) -násobkem rovnice první. Po jejím zkrácení číslem -5 získáme dvě identické lineární rovnice se dvěma neznámými, které mají zřejmě stejná řešení; při výpočtu se proto stačí zabývat jen jednou z nich – a jak jsme viděli v předchozí části, jedna lineární rovnice se dvěma neznámými tvaru (6.2) má vždy nekonečně mnoho řešení. V tomto případě se také názorně říká, že obě rovnice **vypovídají totéž**.

☛ **Příklad 45**

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} 8x & + & 4y = 1 \\ 12x & + & 6y = 5 \end{array}$$

Řešení

Opět si ukážeme jen jeden způsob řešení.

Metoda sčítací. První rovnici vynásobíme číslem 3, druhou -2 :

$$\begin{array}{rcl} 8x & + & 4y = 1 \\ 12x & + & 6y = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot 3 \\ | \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 24x & + & 12y = 3 \\ -24x & - & 12y = -10 \end{array}$$

Po sečtení pak dostaneme

$$0 = -7,$$

takže **zadaná soustava nemá řešení**, tj. $\mathbf{K} = \emptyset$.

Povšimněme si, že v tomto případě je levá strana druhé rovnice $(2, 5)$ -násobkem levé strany rovnice první, zatímco u pravých stran tento vztah neplatí. Pro názornost vynásobme první rovnici číslem 3 a druhou 2 :

$$\begin{array}{rcl} 24x & + & 12y = 3 \\ 24x & + & 12y = 10 \end{array}$$

Je zřejmé, že určitě nelze nalézt dvě reálná čísla x, y tak, aby byl výraz $24x + 12y$ roven jak 3, tak i 10. Říkáme proto, že **rovnice dané soustavy si odporují**.

Na základě poznatků z předchozích příkladů můžeme říci:

Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

- ☛ **nemá žádné řešení**, pokud si rovnice odporují,
- ☛ **má nekonečně mnoho řešení**, pokud rovnice vypovídají totéž,
- ☛ **má právě jedno řešení** v ostatních případech.

Na závěr poznamenejme, že postup, který se pro řešení dané soustavy volí, závisí na konkrétním zadání (v některých případech je výhodnější metoda sčítací, jindy metoda dosazovací či jí podobná metoda srovnávací) i na zkušenostech řešitele.

6.3 Praktické problémy vedoucí na řešení soustavy rovnic

Na několika příkladech si ukažme využití soustav lineárních rovnic při řešení některých praktických problémů.

☛ *Příklad 46*

Klempířská pájka je slitina cínu a olova. Jeden druh pájky obsahuje 25% cínu a druhý druh 60% cínu. Smíšením obou druhů pájek a přidáním 2 kg čistého olova máme vyrobit 10 kg pájky obsahující 30% cínu. Kolik kilogramů každého druhu pájky při tom musíme použít?

Řešení

Označme jako x hledanou hmotnost (v kilogramech) prvního druhu pájky a jako y hledanou hmotnost druhého druhu pájky. Hmotnost slitiny obsahující tato množství pájek a 2 kg čistého olova má být 10 kg, což vyjadřuje rovnice

$$x + y + 2 = 10.$$

Porovnáním hmotností čistého cínu v použitých pájkách a ve výsledné slitině získáme rovnici:

$$x \cdot \frac{25}{100} + y \cdot \frac{60}{100} = 10 \cdot \frac{30}{100}$$

Problém jsme tak převedli na řešení soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými (druhou rovnici vynásobíme 100):

$$\begin{array}{rclcl} x & + & y & = & 8 & | \cdot (-25) \\ 25x & + & 60y & = & 300 & \\ \hline -25x & - & 25y & = & -200 & \\ 25x & + & 60y & = & 300 & \\ \hline & & 35y & = & 100 & \\ & & y & = & \frac{100}{35} = \frac{20}{7} \doteq 2,86 & \\ \hline x & = & 8 - y = 8 - \frac{20}{7} = \frac{36}{7} \doteq 5,14 & & & \end{array}$$

Závěr: Musíme použít asi 5,14 kg pájky prvního druhu a asi 2,86 kg pájky druhého druhu.

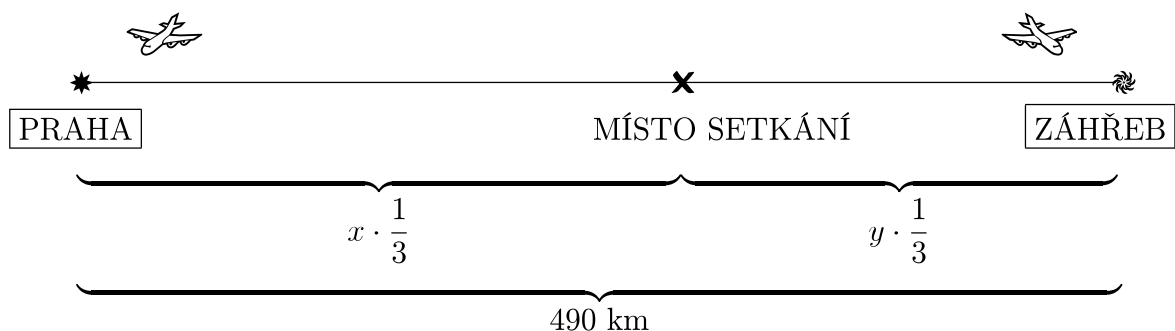
☛ Příklad 47

Dvě letadla startující současně z letišť v Praze a Záhřebu letí navzájem proti sobě a setkají se za 20 minut. Vzdálenost letišť je 490 km. Průměrná rychlost letadla letícího z Prahy je o 210 km/h větší než průměrná rychlost druhého letadla. Vypočítejte průměrné rychlosti obou letadel.

Řešení

Označme:

průměrná rychlost letadla startujícího v Praze (v km/h)		x
průměrná rychlost letadla startujícího v Záhřebu (v km/h)		y
čas od startu do setkání letadel		$\frac{1}{3}$ h
vzdálenost letišť		490 km



OBR. ??14 K ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 47

Podle zadání platí pro rychlosti letadel vztah

$$x = y + 210$$

a pro vzdálenosti uražené od startu do okamžiku setkání (viz obr. 14) platí:

$$x \cdot \frac{1}{3} + y \cdot \frac{1}{3} = 490.$$

Dosadíme-li z první rovnice do druhé, dostaneme:

$$\begin{aligned} (y + 210) \cdot \frac{1}{3} + y \cdot \frac{1}{3} &= 490 \\ y + 210 + y &= 1470 \\ 2y &= 1260 \\ y &= 630 \implies x = 840 \end{aligned}$$

Závěr: Letadlo startující v Praze letělo rychlostí 840 km/h, letadlo startující v Záhřebu letělo rychlostí 630 km/h.

✎ **Příklad 48**

Z Jevíčka vyjel dopoledne do Prahy osobní vlak. Ve stejný okamžik vyjel po stejné trati z Prahy do Jevíčka nákladní vlak. Oba vlaky projely celou trasu stálými rychlostmi. Na trati se minuly v 10.15 hodin. Osobní vlak dojel do cíle téhož dne ve 12.15 hodin, nákladní vlak dojel do cíle téhož dne ve 14.45 hodin. V kolik hodin vlaky vyjely?

Řešení

Označme:

rychlost osobního vlaku (v km/h)	x
rychlost nákladního vlaku (v km/h)	y
čas (v h) od odjezdu do míjení vlaků	t
čas (v h) od míjení do konce cesty spěšného vlaku	2 h
čas (v h) od míjení do konce cesty nákladního vlaku	$\frac{9}{2}$ h

Před setkáním:



Po setkání:



OBR. ??15 K ŘEŠENÍ PŘÍKLADU 48

Nákladní vlak urazil vzdálenost mezi Prahou a místem setkání za t hodin rychlostí y km/h, tato vzdálenost je proto rovna $y \cdot t$ kilometrů. Osobní vlak po setkání urazil stejnou vzdálenost za 2 hodiny rychlostí x km/h, proto je tato vzdálenost rovna také $x \cdot 2$ kilometrů (viz obr. 15). Dostáváme tedy rovnici:

$$y \cdot t = x \cdot 2$$

Stejně tak vzdálenost mezi místem setkání a Jevíčkem můžeme vyjádřit pomocí rychlosti osobního a nákladního vlaku a získáme druhou rovnici:

$$x \cdot t = y \cdot \frac{9}{2}$$

Problém je tedy převeden na řešení soustavy dvou rovnic, z níž potřebujeme určit hodnotu neznámé t . Vyjádříme-li z první rovnice x ,

$$x = \frac{y \cdot t}{2},$$

a dosadíme do druhé, dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{y \cdot t}{2} \cdot t &= y \cdot \frac{9}{2} \\ y \cdot t^2 &= 9y \quad | : y \quad (y \neq 0 - \text{nenulová rychlost}) \\ t^2 &= 9 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

(předposlední rovnici by vyhovovala i hodnota -3 , protože však hledáme čas, přichází v úvahu jen kladný kořen).

Závěr: Vlaky vyjely 3 hodiny před setkáním, tj. v 7.15 h.

7 NEROVNICE

V části 1.3 jsme se seznámili s **nerovnostmi** a jejich základními vlastnostmi. **Nerovnice** obsahuje – na rozdíl od nerovností – kromě čísel také jednu nebo více **neznámých**. **Řešit nerovnici** znamená určit všechna čísla z dané množiny, po jejichž dosazení za neznámé přejde tato nerovnice v platnou nerovnost.

Při řešení nerovnic postupujeme podobně jako při řešení rovnic: postupně je převádíme na nerovnice jednodušší, které však mají stále stejnou množinu řešení, až dojdeme k nerovnici, jejíž řešení známe. Připomeňme si nyní **ekvivalentní úpravy**, tj. úpravy, které nemění množinu kořenů:

- ➔ vzájemná výměna stran nerovnice se současnou **změnou znaku nerovnosti v obrácený**
- ➔ přičtení téhož čísla nebo mnohočlenu k oběma stranám nerovnice
- ➔ odečtení téhož čísla nebo mnohočlenu od obou stran nerovnice
- ➔ vynásobení (vydělení) obou stran nerovnice týmž **kladným** číslem
- ➔ vynásobení (vydělení) obou stran nerovnice týmž **záporným** číslem a současná **změna znaku nerovnosti**

☛ Příklad 49

V oboru reálných čísel řešte nerovnici $\frac{2x+1}{3} < \frac{2x-1}{5}$.

Řešení

$$\begin{array}{rcll} \frac{2x+1}{3} < \frac{2x-1}{5} & | \cdot 15 & & \\ 5(2x+1) < 3(2x-1) & & & \\ 10x+5 < 6x-3 & | -6x-5 & & \\ 4x < -8 & | :4 & & \\ x < -2 & & & \end{array}$$

Proto $\mathbf{K} = (-\infty, -2)$.

V části 21 jsme se zabývali rovnicemi s neznámou ve jmenovateli, které vedly na řešení lineárních rovnic. Při řešení **nerovnice s neznámou ve jmenovateli** budeme postupovat analogicky: všechny členy převedeme na jeden zlomek a pak budeme zjišťovat, pro které hodnoty neznámé tento zlomek splňuje požadovanou nerovnost:

☛ Příklad 50

V oboru reálných čísel řešte nerovnici $\frac{x+1}{3x-2} \leq 2$.

Řešení

Odečteme číslo 2 z pravé strany a vzniklý rozdíl převedeme na jeden zlomek:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{3x-2} - 2 &\leq 0 \\ \frac{x+1-2(3x-2)}{3x-2} &\leq 0 \\ \frac{-5x+5}{3x-2} &\leq 0\end{aligned}$$

Zlomek na levé straně je menší nebo roven nule, je-li buď $-5x+5 \leq 0 \wedge 3x-2 > 0$ (symbol $\wedge$ čteme „**a zároveň**“), anebo $-5x+5 \geq 0 \wedge 3x-2 < 0$ (ve jmenovateli nemůže být nikdy nula), tj.

$$\begin{aligned}(-5x \leq -5 \quad \wedge \quad 3x > 2) \quad \text{nebo} \quad (-5x \geq -5 \quad \wedge \quad 3x < 2) \\ \left(x \geq 1 \quad \wedge \quad x > \frac{2}{3} \right) \quad \text{nebo} \quad \left(x \leq 1 \quad \wedge \quad x < \frac{2}{3} \right) \\ x \geq 1 \quad \text{nebo} \quad x < \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\text{Proto } \mathbf{K} = \left(-\infty, \frac{2}{3} \right) \cup \langle 1, +\infty \rangle.$$