

Neeuklidovská geometrie

Pavel Provinský

5. února 2013

Druhý proud poznání směřoval k obecné teorii relativity přes neeuklidovskou geometrii. EUKLEIDÉS staví ve svých *Základech* geometrii na následujících pěti postulátech:

1. Dva body lze vždy spojit (jedinou) přímkou.
2. Přímkou čáru omezenou lze vždy prodloužit.
3. Z libovolného středu a poloměru lze vždy sestrojiti kružnici.
4. Všechny pravé úhly jsou mezi sebou ekvivalentní.
5. Protíná-li příčka dvě přímky a tvoří-li s nimi na téže straně dva vnitřní úhly o součtu menším, než dva pravé (180°), tyto dvě přímky - v případě nutnosti prodlouženy - protínají se na téže straně příčky, kde je součet zmíněných úhlů vnitřních menší než dva pravé.¹

Na první pohled vidíme, že pátý postulát je o poznání delší a složitější než postuláty předchozí. V tomto smyslu kazí jinak esteticky velmi krásnou stavbu geometrie. Pro Staré Řeky také nebyl zdaleka tak zřejmý jako postuláty předešlé.² To obojí vedlo ke snaze pátý postulát dokázat z axiomů a postulátů předcházejících. Staletí neúspěchů vedla GIOROLAMA SACCHERIHO (1667 - 1733) k pokusu o důkaz sporem. Pokusil se vybudovat jakýsi nepřírozený geometrický svět, ve kterém pátý postulát neplatí, kdežto ostatní axiomy a postuláty ano. Očekával, že dříve či později v tomto světě narazí na spor a tento svět se zhroutí. Považme, jaké sebezapření asi vyžadovalo všestranné rozvíjení teorie, která měla sloužit jen k tomu, abychom ji nakonec prohlásili za neplatnou.

Saccheri dospěl k množství podivných výroků, které v jeho světě platily. Například nelze sestrojit čtverec či obdélník. Součet úhlů v libovolném trojúhelníku je menší než dva úhly pravé. Ke každé přímce lze bodem, který na ní neleží vést více různých přímek, které ji neprotnou.

Poslední tvrzení si znázorníme obrázkem.

¹Při podrobném studiu Eukleidových *Základů* zjistíme, že některé postuláty, o které se dále opírá, zformulovat opomněl. Jde například o tvrzení, že jestliže přímka vchází do trojúhelníka ABC bodem A , pak jistě protne i stranu BC . Dle [4, strana 29]. Postuláty převzaty z Václav Hlavatý: *Úvod do neeuklidovské geometrie*, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1949, [2, strana 11].

²Platnost prvních čtyř Eukleidových postulátů nazíráme už tehdy, když si v mysli představíme jen potenciálně nekonečnou rovinu nebo prostor. Při libovolném zvětšování této konečné roviny však budou existovat dvojice téměř rovnoběžných přímek, které se neprotnou a pro které tudíž postulát pátý neplatí. Myslet si, že všechny takovéto přímky vymizí, můžeme až tehdy, budeme-li pracovat v rovině či prostoru již rozepnutém do nekonečna, tedy aktuálně nekonečném. A to byl pro Staré Řeky problém.

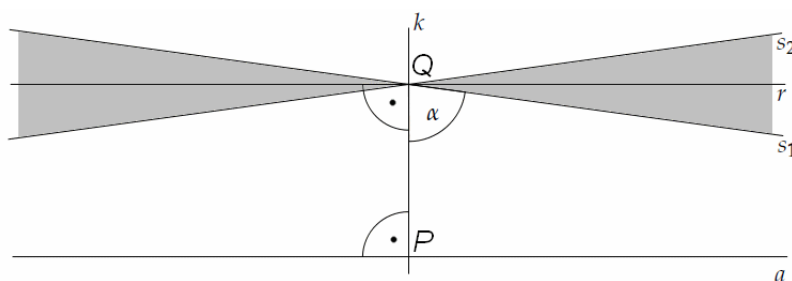
Jejich matematika a geometrie byla totiž jen potenciálně nekonečná. Uznávali, že v případě potřeby můžeme úsečku či třeba číselnou řadu vždy prodloužit, v každé fázi prodloužování ji však chápali jako konečnou. Když bychom jim řekli: „Představte si množinu všech přirozených čísel,“ začali by se silně bouřit. Vždyť těch je nekonečno a tudíž, ať si jich představím kolik chci, třeba až po nějaké obrovské n , stejně vždy budou existovat čísla $n + 1$ a další, která má představa již neobsahuje.

Změnu přineslo až křesťanství zvěstující všemohoucího a nejvyšší milujícího Boha. Ten by přece měl umět, díky všemohoucnosti, si všechna přirozená čísla představit. GIORDANO BRUNO šel ještě dál a tvrdil, že všemohoucí a nejvyšší dobrý Bůh si nekonečno dovede nejen představit, ale i stvořit. A jistě je i stvořil. Neboť nekonečný svět je určitě lepší než konečný. Nekonečný totiž může obsahovat ten konečný a ještě nějaké dobro navíc. Když by Bůh náš svět tedy nestvořil nekonečný, pak proto, že nechtěl, ale pak by nebyl nejvyšší dobrý, nebo nemohl, pak by ale nebyl všemohoucí. Bruno tedy dospívá k závěru, že náš svět aktuálně nekonečný je a musí být a hledá jej.

Kde ale tento nekonečný svět je? Stejně jako člověk antický či člověk středověký věděl, že ať je Země placka nebo koule, ať si planety poletují kolem Slunce nebo kolem Země, to vše se děje uzavřeno v obrovské sice, ale konečné kouli - sféře nebeské. A hvězdy, to jsou dírký v této sféře, kterými prosvítá světlo z prvního nebe. Kde ale je ten nekonečný svět? Znovu se zahleděl ke hvězdám a napadlo jej, že ta světýlka nejsou dírký v nebeské báni, ale další slunce a další světy. A pohled na noční oblohu je vlastně pohledem do aktuálního nekonečna.

V pozdějších staletích se z představy, že Bůh si dovede představit všechna čísla nebo aktuálně nekonečnou přímku, a z toho, že my můžeme uvažovat o takovémto Bohu, nějak zrodila představa, že o nekonečných přímkách či všech číslech nakonec můžeme uvažovat i my. Či snad si je dokonce umíme i představit. Na tomto základě pak vznikla například CANTOROVA teorie množin.

(Volně dle Petr Vopěnka: *Úhlavní kámen evropské vzdělanosti a moci: Souborné vydání Rozprav s geometrií*, Praha, Praha, 2000, [3].)



Obrázek 1: Přímka a její souběžky a rozběžky

Přímky, které přímku a neprotnou, procházejí šedivou oblastí. Mezní přímky s_1 a s_2 , které přímku a ještě neprotnou, se nazývají souběžky. Ostatní přímky, které přímku a neprotnou a které jsou souběžkami sevřeny, se nazývají rozběžky. Jedna z rozběžek - r - je kolmá na kolmici k . Úhel α se nazývá úhlem souběžnosti.

Studiem rozběžek a souběžek získal Saccheriho nástupce JOHANN HEINRICH LAMBERT jeden z nejpozoruhodnějších poznatků o tomto neeuklidovském světě - absolutnost délek.³ Každé vzdálenosti PQ z našeho obrázku totiž jednoznačně odpovídá nějaký ostrý úhel souběžnosti α a opačně. A protože velikosti úhlů absolutní jsou, jsou absolutní i délky.

Za jednotku délky můžeme zvolit např. délku odpovídající polovině pravého úhlu. Tuto délku k budeme nazývat parametrem hyperbolického geometrického světa. Parametr k má mnoho zajímavých vlastností.

Pokud např. budeme sestavovat stále větší a větší pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, jejich výšky se budou pouze zespoda blížit k hodnotě k a nikdy jí nedosáhnou.

Nebo pokud na osovém kříži ve vzdálenosti a od středu vytvoříme čtyři kolmice, ty se protnou a vytvoří pravidelný čtyřúhelník. To však jen pokud $a < k$. Pokud bude $a \geq k$, utečou kolmice po způsobu hyperbol do nekonečna a nikdy se neprotnou.

Mnohé vlastnosti Saccheriho světa byly chápány jako sporné. Vždy však se postupně prosadil názor, že to jsou vlastnosti sice podivné, o čistě logický spor však nejde. Saccheriho svět tak nebyl zničen a pátý postulát nebyl dokázán.

To vedlo k radikální změně pohledu na Saccheriho svět. „Tento důsledek má v sobě cosi vábného, co lehko vzbuzuje přání, aby třetí hypotéza byla přece jen pravdivá,“ píše 1766 Lambert o dojmu, který v něm vyvolal objev absolutnosti délek. CARL FRIEDRICH GAUSS byl asi první, kdo o tomto světě opravdu uvažoval jako o potenciálně možném. Dokonce přeměřil úhly v trojúhelníku alpských vrcholů Brocken - Hohenhagen - Inselsberg,⁴ zda je součet vnitřních úhlů opravdu 180° . V rámci přesnosti měření však odchylku nezjistil.⁵ Gauss o neeuklidovském světě nikdy nic nevydal.

„Máme celkem dvojí geometrii: geometrii v užším slova smyslu, totiž Eukleidovu, a pak astralickou geometrii,“ píše 1818 F. K. SCHWEIKART Gaussovi. Astralickou geometrií míní geometrii neeuklidovskou.

„Nyní nemohu víc říci než tolik, že jsem z ničeho stvořil nový svět,“ napsal 1823 otci maďarský matematik JANOS BOLYAI. Svůj dnes slavný *Appendix* o tomto světě napsal 1825 a vydal jej 1832 jako dodatek ke knize svého otce. Jeho díla si však nikdo nepovšiml.

Také práce *O načalach geometrii* NIKOLAJE IVANOVIČE LOBAČEVSKÉHO z let 1829 - 1830 nevyvolala žádný zájem. Když Lobačevski požádal o posouzení svého spisu petrohradskou Akademii věd, napsal akademik Ostrogradský: „Autor, jak se zdá, postavil si jako cíl psát tak, aby mu nebylo vůbec rozumět . . . Vše, co jsem pochopil z geometrie pana Lobačevského, je více než podprůměrné. Všechno, co jsem nepochopil, bylo zřejmě špatně vyloženo a lze tudíž těžko luštit. Z toho jsem učinil závěr, že kniha pana rektora Lobačevského je poskládaná chybou, je nedbale napsána a nezaslужuje tudíž pozornosti Akademie.“

³ Absolutností úhlů myslíme fakt, že si patřičný úhel, např. 45° , může kdokoli kdykoli vyrobit (např. půlením a skládáním z úhlu přímého), aniž by bylo třeba posílat mu k tomu nějaký etalon. Úhly jsou absolutní v Eukleidově, Lobačevského i Riemannově světě.

Absolutností délek myslíme fakt, že si určitou délku může kdokoli kdykoli vyrobit, aniž by bylo třeba posílat mu tentokrát nějaký délkový etalon. Délky jsou absolutní v Lobačevského i Riemannově světě, v Eukleidově nikoli.

Absolutnost rozměrů v Lobačevského i Riemannově světě si můžeme lehce vysvětlit následujícím způsobem: V Riemannově geometrii je součet úhlů v trojúhelníku větší než 180° (jako v trojúhelníku na kouli), v Lobačevského menší než 180° . V obou případech je odchylka od 180° úměrná obsahu trojúhelníku. Rovnostranný trojúhelník se součtem úhlů 181° (resp. 179°) tedy můžeme sestavit jen v jedné jediné velikosti a jeho stranu tedy použít jako absolutně platné měřítko.

⁴ Trojúhelník má strany 69, 85 a 197 km. Dle [1, strana 23]

⁵ Také Lobačevski uvažoval možnost, že by náš svět mohl být světem hyperbolickým. Parametr k se pokusil určit měřením astronomickým. Použil k tomu pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami Země Slunce a Země Sirius. Zjistil, že parametr k je alespoň 166 320-ti násobek poloměru zemské dráhy. Pro praktické účely můžeme tedy náš svět považovat za euklidovský. Dle [2, strana 99].

Lobačevský, nepochopen, se snažil celý život poznanou pravdu a hyperbolický geometrický svět hájit.⁶ Vážnost si myšlenka neeuklidovských geometrií však získala teprve tehdy, když byly vytvořeny jejich modely v klasickém euklidovském světě. Například POINCARÉHO model uvažuje v otevřené polorovině půlkružnice se středem na hranici poloroviny a polopřímky kolmé na hranici této poloroviny. Pokud tyto polopřímky i polokružnice nazvu souhrnně Lobačevského přímkami a zavedu příslušnou metriku, platí pro ně všechny vlastnosti Lobačevského hyperbolické geometrie.⁷

K neeuklidovské geometrii je možné přistupovat z několika stran. Můžeme vycházet z axiomatiky, jak to činili Gauss, Schweikart, Bolyai, či Lobačevski. Jiným přístupem je východisko KLEINOVO. Ten si povšiml, že vlastnosti útvarů v rovině se nemění, pokud je posuneme, otočíme, či přezrcadlíme. Tedy pokud $X' = X \cos \varphi + Y \sin \varphi + X_0$ a $Y' = \varepsilon (-X \sin \varphi + Y \cos \varphi) + Y_0$, kde $\varepsilon = \pm 1$. Klein navrhl pojem geometrie zevšeobecnit tak, že připustíme obecnější grupu transformací $X' = a_{11}X + a_{12}Y + b_1$ a $Y' = a_{21}X + a_{22}Y + b_2$ a budeme studovat invarianty, které se při té či oné grupě transformací nezmění.

Například obsah trojúhelníka lze vyjádřit pomocí determinantu $S = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}$. Ten se transformuje takto: $\begin{vmatrix} X'_1 & Y'_1 & 1 \\ X'_2 & Y'_2 & 1 \\ X'_3 & Y'_3 & 1 \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}$. Obsah trojúhelníka je tedy invariantem právě v těch geometriích, kde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$.

Vyslovme nyní Kleinův princip: Je dána rovina a v ní grupa transformací. Úkolem geometrie je studovat vztahy, které se transformacemi této grupy nezmění.⁸

Jiným způsobem, jak se můžeme přiblížit k neeuklidovským geometriím je přístup ze strany diferenciální geometrie. Tuto cestu zvolil BERNHARD RIEMANN. Ten objevil možnost nové geometrie, geometrie eliptické.

V této geometrii nelze vést bodem, který neleží na přímce a , žádnou přímku, která by přímku a neprotla. A součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180° .

Jak je to ale možné? Vždyť už Saccheri dokázal, že tomu tak být nemůže. Při bližším pohledu na důkaz však zjistíme, že Saccheri předpokládal, že úsečky mohou být libovolně dlouhé. V Riemannově eliptické geometrii mají však i přímky jen konečnou délku (stejnou) a jsou uzavřené, podobně jako kružnice. Úsečky samozřejmě nemohou být delší než přímky. Polovinu délky přímky budeme nazývat parametrem eliptického geometrického světa. Vidíme, že i v eliptickém světě jsou délkové rozměry absolutní.⁹

Ze světa euklidovského, hyperbolického a eliptického jedině euklidovský nemá absolutní rozměry. Jak je na tom náš svět reálný?

Ve světě, v němž rozměry absolutní nejsou, bychom z uskutečnitelnosti nějakého objektu měli usuzovat, že je uskutečnitelný i týž objekt libovolně zvětšený či zmenšený. Tedy například atomy uhlíku bychom měli nacházet v nejrůznějších velikostech. To však nepozorujeme. Naopak, velikosti všech druhů atomů, nakolik o nich můžeme mluvit, jsou konstantní. Rozměry v našem světě, resp. v té jeho části, kterou známe, jsou tedy absolutní a euklidovský geometrický svět tedy můžeme jako přesný model našeho prostoru zavrhnout.¹⁰

A k tomuto pozoruhodnému závěru nepotřebujeme ani teorii relativity.

Reference

- [1] Arnošt Dittrich: O přímočarosti světelných paprsků a vztahu mezi zákonem Newtonovým a Euklidovou geometrií *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, Vol. 46 (1917), No. 4-5, 338–367, [online]. 1917 [cit. 22.9.2011]. Dostupné z <<http://dml.cz/dmlcz/122170>>.
- [2] Václav Hlavatý: *Úvod do neeuklidovské geometrie*, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1949
- [3] Petr Vopěnka: *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci: Souborné vydání Rozprav s geometrií*, Práh, Praha, 2000
- [4] Petr Vopěnka: *Rozpravy s geometrií: Otevření neeuklidovských geometrických světů - Trýznivé tajemství*, Vesmír, Praha, 1995

⁶Dle Petr Vopěnka: *Rozpravy s geometrií: Otevření neeuklidovských geometrických světů - Trýznivé tajemství*, Vesmír, Praha, 1995, [4, strany 11-22, 26-31, 39, 45-48, 54-57, 155, 66].

⁷Dle Ján Gatál, Milan Hejný: *Stavba Lobačevského planimetrie*, Mladá Fronta, Praha, 1969, [5, strana 50].

⁸Dle [2, strany 22-24].

⁹Dle [4, strany 81, 86].

¹⁰Z toho však neplyne, že by náš svět musel být hyperbolický či eliptický. Je možné uvažovat i mnohé jiné geometrie. Nelze zavrhnout ani přibližně eukleidovský svět, ke kterému se jako k jedné ze tří variant na konci našeho miniseriálu dopointáme.

[5] Ján Gatiaľ, Milan Hejný: *Stavba Lobačevského planimetrie*, Mladá Fronta, Praha, 1969